УДК 556.53

Н.С. Лобода, *д.г.н., проф.*, **А.М. Пономаренко**, *магістр*
Одеський державний екологічний університет

ФРАКТАЛЬНІСТЬ РІЧКОВИХ СИСТЕМ ПІВДЕННИЙ БУГ І ДНІСТЕР

Фрактальні властивості річкових мереж рр. Дністер та Південний Буг визначені на основі застосування ієрархічної Хортона і Стахлера та статистичної моделей. Фрактальні розмірності річкових систем річок Дністер дорівнюють D=1,61 та D=1,58, відповідно; лакунарна розмірність D_G приймається 1,99, а розмірність Хортона H_0 становить 0,573 та 0,531, відповідно.

Ключові слова: *річкова мережа, фрактальна розмірність, самоподібність, фрактальні властивості, самоафінність.*

Актуальність

Актуальність теми полягає в тому, що в гідрології теорія фракталів дала можливість істотно поглибити розуміння та інтерпретацію багатьох закономірностей, встановлених раніше емпірично, і відкрила значні перспективи для розробки методів просторово – часової інтерполяції та екстраполяції гідрологічних характеристик на основі вивчення їх мінливості при різних просторово – часових масштабах. Це має для гідрології особливе значення, враховуючи недостатність даних вимірювань гідрологічних характеристик для багатьох районів земної кулі і актуальність створення моделей гідрологічного циклу для великих регіонів.

Спочатку фрактали застосовувалися як своєрідна мова геометрії [2, 5, 8]. Проте, на відміну від звичайних об’єктів евклідової геометрії (пряма лінія, коло, тощо), вони не можуть бути безпосередньо спостереженими. Фрактали виражаються не в первинних геометричних формах, а в алгоритмах, наборах математичних процедур. Саме їхній пошук й обґрунтовування є центральною задачею сучасної теорії фракталів [4, 7, 9, 10].

Стан проблеми

Фрактали - математичні об'єкти, які мають дробову розмірність. Термін «фрактал» був введений Б.Мандельбротом, співробітником дослідницького центру імені Томаса Дж. Уотсона корпорації IBM в Йорктаун-Хейтсі (шт. Нью-Йорк), у 1975 р. і походить від латинського fractus (дрібний, нерівний, розбивати). Фрактали дають надзвичайно компактний спосіб опису об'єктів і процесів. Багато структур володіють фундаментальною властивістю геометричної розмірності, відомої як інваріантність по відношенню до масштабу, або «самоподібність». Якщо розглядати об'єкти в різному масштабі, то постійно виявляються одні й ті ж фундаментальні елементи (фрактали).

Незалежно від природи або методу побудови у всіх фракталів є одна важлива властивість: ступінь порізаності або складності структури водних об’єктів або їх характеристик може бути виміряна якимось характеристичним числом – ***фрактальною розмірністю***. Використовуючи ідею Мандельброта [8], її можна визначити методом підрахунку квадратів. Уявімо собі об'єкт складної форми, який повністю покритий квадратиками. Частина квадратиків міститиме елементи множини, інші квадратики будуть порожніми. Число непорожніх кліток *N* залежить від форми об'єкту і від розмірів квадратного осередку *E*. Постулізується, що *N* пропорційно $1/E^D$ (чим дрібніша решітка, тим більше непорожніх осередків). Показник ступеня *D* і є фрактальною розмірністю об'єкту.

Дуже часто розмірність *D* збігається з розмірністю самоподібності, яка записується у вигляді

$$D = \frac{\ln N}{\ln n} \ , \ N = n^D, \tag{1}$$

де N - число об'єктів, подібних до вихідного, які мають в n разів менший просторовий масштаб. Цей вираз дозволяє легко оцінювати розмірність D для регулярних фракталів, що будуються за певним алгоритмом. Прикладами регулярних фракталів є килим і трикутник Серпінського, тріада Коха, крива Пеано та ін [5].

Поняття розмірності самоподібних об’єктів формально застосовується, коли який - небудь об'єкт може бути розбитий на N частин, кожна з яких подібна до початкового з коефіцієнтом подібності $1/n$. Наприклад, якщо в околицях точки фрактальної кривої виділити область відносно невеликої величини, то частина кривої, що потрапляє в неї, буде подібна до початкової кривої, тобто має місце подібність всієї кривої її частині. Виражається це в тому, що число відрізків ломаної з довжиною ланки η_1, що містяться між сусідніми вершинами ломаної з довжиною ланки $\eta_2(\eta_2 > \eta_1)$ залежить тільки від відношення η_2 / η_1, а не від η_1 і η_2 окремо [5].

Річкова мережа розглядається як складна ієрархічна система. Одним з перших на наявність певних закономірностей в будові річкових систем звернув увагу на початку 30-х років минулого століття американський учений Р.Е.Хортон. Він запропонував розглядати річкову мережу як відкриту деревовидну систему, яка складається із ієрархії різних підсистем.

На цей час відомо п’ять схем будови річкової мережі, запропонованих різними авторами: 1) «європейська»; 2) метод Р.Е.Хортона; 3) схема М.О.Ржаніцина; 4) розробка Р.Л. Реве; 5) Р.Е. Хортона, вдосконалена А.Н.Шталлером і І.Н. Гарцманом.

У роботі для розподілу приток річкової системи на порядки використана схема М. О. Ржаніцина, згідно з якою притоки діляться на порядки в залежності від їх довжини (табл.1).

Таблиця 1 - Довжина річок та їх порядок по Н.О. Ржаніцину

Довжина річки, Ln, км	Порядок річки	Довжина річки, Ln, км	Порядок річки	Довжина річки, Ln, км	Порядок річки
< 1	1	11 – 24	6	266 – 510	11
1,1 - 2,0	2	25 – 44	7	511 – 880	12
2,1 - 3,5	3	45 – 80	8	881 – 1570	13
3,6 - 6,5	4	81 – 147	9	1571 – 2800	14
6,6 - 10	5	148 - 265	10	2801 - 4620	15

Розглядаючи річкову мережу як відкриту деревоподібну систему, що складається з приток різних порядків і, використовуючи як топологічний параметр порядок водотоку, Р.Е.Хортон сформулював декілька закономірностей, які стали основою сучасної гідрографічної науки.

Перша із закономірностей носить назву закономірності кількості приток: в кожній річковій системі співвідношення між кількістю приток суміжних порядків є величиною постійною, тобто

$$\sigma_0 = \frac{S_{k-1}}{S_k} \ , \tag{2}$$

де σ_0 називається коефіцієнтом біфуркації;

S_k і S_{k-1} – кількість приток суміжних порядків *k* і *k*-1.

Друга закономірність визначає таке положення: співвідношення між довжинами приток річок суміжних порядків залишається в середньому постійним

$$\lambda_0 = \frac{l_k}{l_{k-1}} \quad , \tag{3}$$

де λ_0 - кількість довжини приток; l_{k-1} і l_k - середні довжини водотоків порядків *k* і *k*-1.

Третя закономірність полягає у тому, що площі водозборів приток суміжних порядків також знаходяться в певному співвідношенні

$$\varphi_0 = \frac{F_k}{F_{k-1}} \quad , \tag{4}$$

де φ_0 - коефіцієнт площі; F_k і F_{k-1} - площі водозборів приток порядків *k* і *k*-1.

Четверта закономірність Р.Е.Хортона встановлює співвідношення між середніми уклонами річок суміжних порядків

$$I_0 = \frac{I_{k-1}}{I_k} \quad , \tag{5}$$

де I_0 - коефіцієнт уклонів приток I_{k-1} та I_k суміжних порядків *k* і *k*-1, відповідно.

Б.В. Кіндюком [1] сформульована п'ята закономірність супідрядності водотоків у вигляді співвідношення кутів злиття приток суміжних порядків

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \ , \tag{6}$$

де α_0 - коефіцієнт кутів; α_i і α_{i-1} - середні значення кутів злиття приток суміжних порядків.

Закономірності, установлені Р.Е.Хортоном, були пояснені фрактальною поведінкою річкової мережі. Вперше фрактальна поведінка річкової мережі була виявлена Хаком (1957) у вигляді степеневої залежності довжини річки від площі водозбору та описана Мандельбротом [8]

$$L_r^{1/d} \sim F^{0,5} \ , \tag{7}$$

де L_r - довжина річки уздовж продольної осі.

Установлені закономірності Р.Е.Хортона увійшли до формул визначення фрактальної розмірності річкової мережі, де використовуються константи, які одночасно є коефіцієнтами Р. Е. Хортона:

$$R_L = \frac{L_n}{L_{n-1}} = \lambda_0 \, , \tag{8}$$

$$R_B = \frac{N_{n-1}}{N_n} = \sigma_0 \, , \tag{9}$$

$$R_A = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi_0 \, , \tag{10}$$

$$R_I = \frac{I_{n-1}}{I_n} = I_0 . \qquad (11)$$

Тут: L_n, N_n, F_n, I_n - середня довжина приток *n* – го порядку, їх кількість, площа водозбору та уклон;

L_{n+1}, N_{n+1}, F_{n+1}, I_{n+1} - середня довжина приток *n* + 1 – го порядку, їх кількість, площа та уклон;

L_{n-1}, N_{n-1}, F_{n-1}, I_{n-1} - середня довжина приток *n* – 1 – го порядку, їх кількість, площа та уклон.

Константи R_L, R_B, R_A, R_I можуть визначатися за даними про притоки різних суміжних порядків.

Фрактальні розмірності річкових мереж вивчалися рядом авторів: Ла Барбера, Россо, Тарбтоном, Нікорою та ін. [3,5,7].

Метою роботи є визначення фрактальних розмірностей річкових систем України з метою їхньої подальшої типізації та ідентифікації.

Об'єкти дослідження – річкові системи Дністра та Південного Бугу.

Предмет дослідження – фрактальні закономірності річкових мереж.

Матеріали та методи дослідження

Для визначення фрактальної розмірності річкових мереж рр. Дністер та Південний Буг були використані різні моделі. Одна з них - ієрархічна модель, в якій річкова система розглядається як сукупність приток різних порядків [1, 2, 5]. До виду ієрархічних належить модель Хортона та Стахлера.

В основу моделі Хортона та Стахлера покладено співвідношення для визначення фрактальної розмірності річкової системи

$$D = \frac{\ln \frac{Z_n - L_n}{Z_{n-1}}}{\ln \frac{L_n}{L_{n-1}}} = \frac{\ln \frac{\sum Z_{n-1}}{Z_{n-1}}}{\ln \frac{L_n}{L_{n-1}}} = \frac{\ln R_B}{\ln R_L} , \qquad (12)$$

де Z_n - повна довжина річкової мережі n-го порядку, $\sum Z_{n-1}$ – повна довжина річок (*n* - 1) – го порядку в *n* – порядковій річковій системі.

Фрактальна розмірність річкової мережі визначається за формулою як тангенс кута нахилу ліній залежностей $\ln R_B = f(\ln R_L)$ або $\ln R_B = f(\ln R_A)$:

$$D = \frac{\ln R_B}{\ln R_L} , \qquad (13)$$

$$D = \frac{\ln R_B}{\ln R_L} = 2\frac{\ln R_B}{\ln R_A} . \qquad (14)$$

Константи R_L, R_B, R_A можуть визначатися за даними про притоки різних суміжних порядків:

$$R_L = \frac{L_{n+1}}{L_n} , \; R_B = \frac{N_{n-1}}{N_n} , \; R_A = \frac{A_{n+1}}{A_n} . \qquad (15)$$

Фрактальна розмірність визначається по залежностях вигляду $\ln R_B = f(\ln R_L)$ та $\ln R_B = f(\ln R_A)$ як тангенс кута нахилу ліній на графіках (рис.1, рис.2).

Інша модель, за якою визначалася фрактальна розмірність – статистична. Тут для кількісної оцінки самоафінних властивостей річкової мережі використовуються наступні співвідношення:

$$l \sim L'^{\nu_1}; \tag{16}$$

$$\omega \sim L'^{\nu_2}, \tag{17}$$

де l і ω - характеристики подовжніх і поперечних розмірів річкової мережі відповідно; L' - повна довжина річкової мережі, ν_1 і ν_{2I} – масштабуючі показники.

Фрактальні властивості встановлюються шляхом аналізу та побудови статистичних залежностей на основі фактичних даних про гідрографічні характеристики річкової мережі.

Якщо врахувати, що повна довжина річкової мережі L' пов'язана із площею водозбору, то мають силу такі співвідношення [2, 5]:

$$l \sim F^{\nu_1}; \tag{18}$$

$$\omega \sim F^{\nu_2}, \tag{19}$$

де F – площа водозбору.

Результати дослідження

Для визначення фрактальних розмірностей за ієрархічною моделлю були зібрані дані про кількість, довжину та площу приток різних порядків для річок Дністер та Південний Буг (табл. 2, табл. 3).

Таблиця 2- Вихідні дані для розрахунку фрактальної розмірності приток різних порядків річки Дністер

Порядок притоки	Кількість приток N	Довжина, Ln (км)	Площа, An(км²)
IV	1	3,6	159
V	30	9,95	53,56
VI	234	16,2	75,2
VII	67	32,4	192,3
VIII	32	58,6	608,6
IX	14	100,9	1181,4
X	7	209,7	3256,4

Таблиця 3- Вихідні дані для розрахунку фрактальної розмірності приток різних порядків річки Південний Буг

Порядок притоки	Кількість приток N	Довжина, Ln (км)	Площа, An(км²)
V	21	10	41,83
VI	259	16,6	102,8
VII	56	30,8	260,8
VIII	24	59,83	694,2
IX	10	108	3286
X	5	159	2822
XI	1	354	9890

Фрактальна розмірність визначалася на основі використання співвідношень (13), (14), (15), як тангенси кута нахилу залежностей $\ln R_B = f(\ln R_L)$ та $\ln R_B = f(\ln R_A)$ – (рис.1, 2).

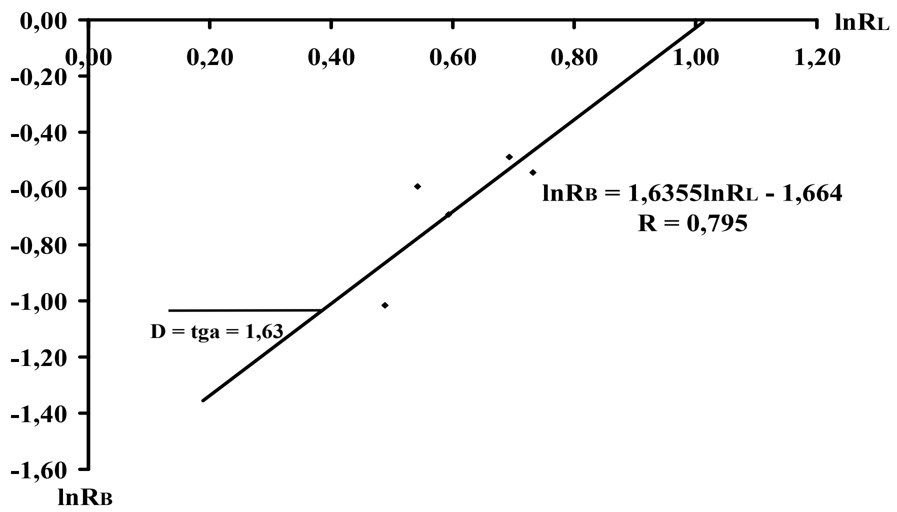

Рис. 1 –Залежність характеристик гідрографічної мережі $\ln R_B$ та $\mathbf{ln} R_L$ в басейні р. Дністер.

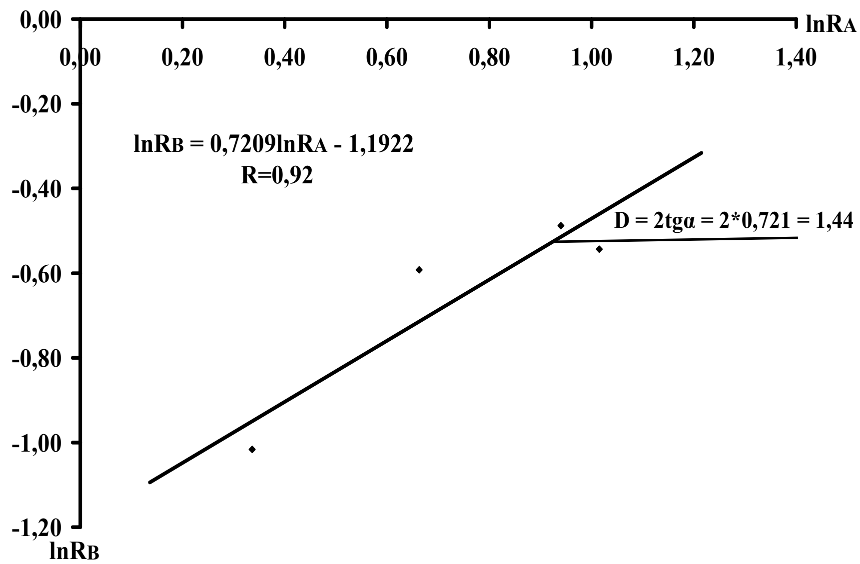

Рис. 2 – Залежність характеристик гідрографічної мережі $\ln R_B$ та $\mathbf{ln} R_A$ в басейні р. Дністер.

У результаті встановлено, що фрактальна розмірність, визначена за співвідношеннями (13) та (14), дорівнює відповідно 1,63 та 1,44 для р. Дністер та 1,68 і 1,22 – для р. Південний Буг.

При використанні статистичного методу були зібрані дані про морфометричні характеристики 100 річок басейну Дністра та 63 – річок басейну р. Південний Буг.

На основі залежностей виду *Lgl = f(LgL')* – (рис.3) та *Lgω = f(LgL')* були отримані експоненти ν_1 та ν_2 як тангенси кутів нахилу ліній на графіках. Ці експоненти були знайдені також за співвідношеннями (16) та (17) після побудови залежностей виду *lgl =f(lgF)* – (рис.4) та *lgω = f(lgF)*. Для Дністра ν_1 = 0,675 та 0,606, ν_2 = 0,340 та 0,394. Після осереднення цих показників для р. Дністер були отримані такі результати:

ν_1 = 0,640 та ν_2 = 0,367, а для р. Південний Буг ν_1 = 0,662 та 0,647; ν_2 = 0,344 та 0,353. Після осереднення показники ν_1 та ν_2 дорівнюють 0,655 та 0,348, відповідно.

Сума експонент $\nu_2 + \nu_1$ визначає так звану лакунарну розмірність $D_G = 2/(\nu_2 + \nu_1)$, а відношення ν_2/ν_1 може інтерпретуватися як експонента Хурста H_0 (Мандельброт, 1986), яка є одним із показників фрактальної поведінки об'єктів, який розраховується при застосуванні стохастичного підходу до описування просторової або часової мінливості досліджуваної характеристики.

Для Дністра лакунарна розмірність D_G = 1,99 і для Південного Бугу ця розмірність також дорівнює 1,99. Індекс Хурста для Дністра становить $H_0 = \nu_2 / \nu_1 = 0{,}367 / 0{,}640 = 0{,}573$;

для Південного Бугу: $H_0 = \nu_2 / \nu_1 = 0{,}348 / 0{,}655 = 0{,}531$.

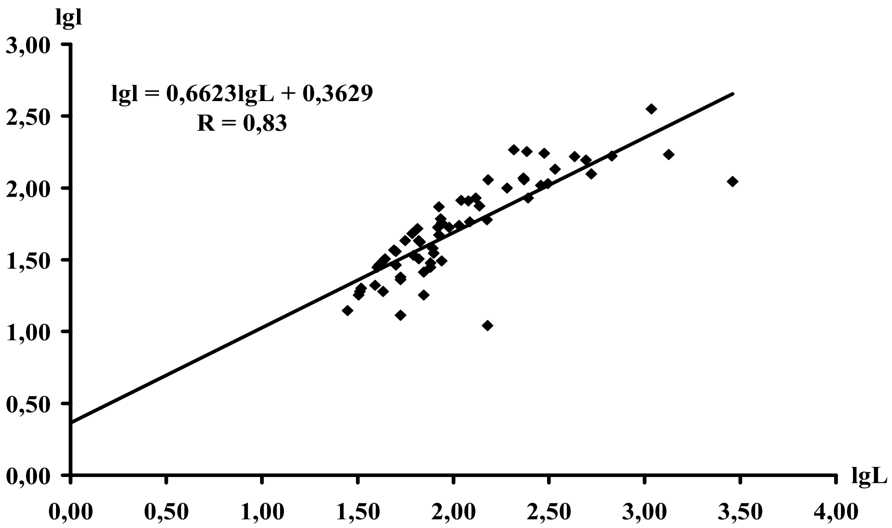

Рис. 3 - Залежність довжини водотоку lgl від повної довжини річки lgL (притоки р. Південний Буг).

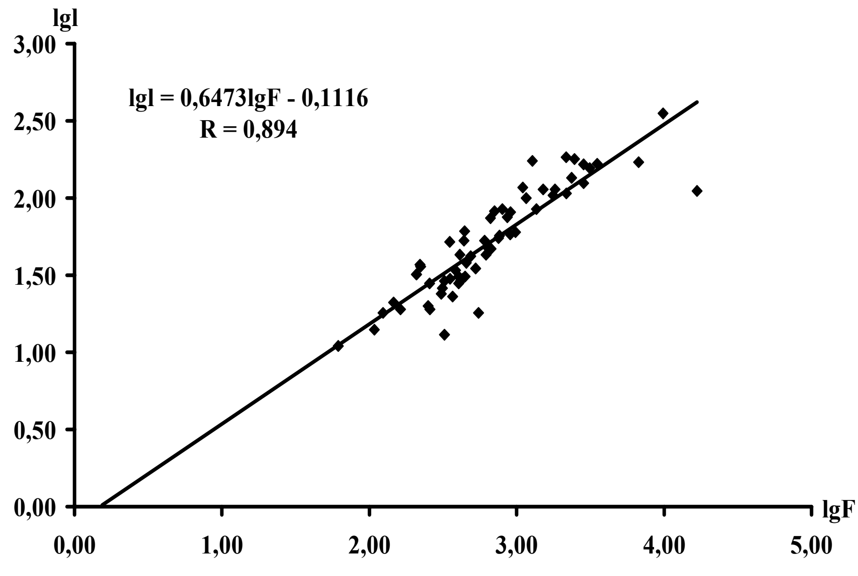

Рис. 4 - Залежність довжини водотоку lgl від площі водозбору lgF (притоки р. Південний Буг).

Фрактальну розмірність річкової системи можна обчислити і за формулою Тарбтона – Пекхама

$$L = CF^{1/d}, \quad (20)$$

де L – повна довжина річки, С – константа, F – площа водозбору.

Для р.Дністер залежність виду (20) приймає вигляд: $L = 0{,}803F^{0{,}762}$. Звідси фрактальна розмірність $D = \frac{1}{0{,}762} = 1{,}31$. Для Південного Бугу: $L = 0{,}962F^{0{,}699}$, звідки $D = \frac{1}{0{,}699} = 1{,}43$.

Висновки

На основі дослідження фрактальної структури річкових систем Дністер та Південний Буг були визначені характеристики фрактальності: лакунарна розмірність, *D*, експонента Хурста та показники ν_1 і ν_2 на основі застосування ієрархічної та статистичної моделей. Установлено, що розглянуті річкові системи мають близьку будову: фрактальна розмірність річкової мережі р. Дністер може бути прийнятою *D* = 1,61, експонента Хурста H_0 = 0,573; для р. Південний Буг *D* = 1,58, H_0 = 0,531.

При зміні складу річкової мережі в умовах глобальних змін клімату, про що відмічалося в роботі [1], ці характеристики також можуть трансформуватися. Окрім того, установлені розмірності можуть бути використані для визначення характеристик мереж та водозборів невивчених річок.

Список літератури

1. *Киндюк Б.В.* Исследование строения гидрографической сети реки Днестр//Захист навколишнього середовища від антропогенного навантаження. Харків–Кременчук. – Вип. 11(13). – 2005 – С. 63-69.
2. *Кучмент Л.С.* Речной сток (генезис, моделирование, предвычисление). Москва, 2008 – 394с.
3. *Лобода Н.С.*, Горобец Т.В. Фрактальные свойства в многолетних колебаниях годового стока рек Украины // Вісник Одеського державного екологічного університету. – Вип.1. - К:КНТ. –2005. - С. 174 -182.
4. *Лобода Н.С.* Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменения под влиянием факторов антропогенной деятельности // Міжвід. наук. зб. України. - Метеорологія, кліматологія та гідрологія. - Одеса. - 2002. – Вип. 45. - С. 140 - 146.
5. *Никора В.И.* Фрактальные свойства некоторых гидрологических объектов. Препринт Института геофизики и геологии АН МССР. Кишинев, 1988 - 43с.
6. Реки и озера Советского Союза. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. – С.25.
7. *Юргенс Хартмут, Хайнц-Отто Пайтген, Дитмар Заупе.* Язык фракталов. В мире науки – 1990/ Nº 10. - С .36-44.
8. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature / Ed. Freeman W.N. and Co. New-York,1983. - 469p.
9. *Nikora V.I., Sapozhnikov V. B.* Water resources research, vol.29, No 10. Institute of Geophysics and Geology, Academy of Science of the Republic of Moldova. Kishinev. October – 1993. - pages 3569-3575
10. *Sapozhnikov V. B., Nikora V.I. J. Phys A*: Math. Institute of Geophysics and Geology, Academy of Science of the RM, Academiei str 3, 277028. Kishinev, Republic of Moldova. Gen.26(1993) L623 - L627, Printed in the UK.

Фрактальность речных систем Южный Буг и Днестр. Лобода Н.С., Пономаренко А. М.
Фрактальные свойства речных сетей рр. Днестр и Южный Буг определялись на основе применения иерархической и статистической моделей. Фрактальные размерности речных систем Днестра и Южного Буга равны: D = 1,61, D = 1,58, соответственно, лакунарная размерность D_G *= 1,99, индекс Хурста* H_0 *= 0,573,* H_0 *= 0,531, соответственно.*
Ключевые слова: *речная сеть, фрактальная размерность, самоподобие, фрактальные свойства, самоафинность*
Fractal of the river systems Southern Bug and Dniester. Loboda N.S., Ponomarenko A. M.
Fractal properties of river networks (Dniester and Southern Bug) were established by the hierarchica and the statistical models. Fractal dimensions of river networks Dniester and Southern Bug are equal: D = 1,61, D = 1,58, accordingly, lacunary dimension D_G *= 1,99, Hurst dimension* H_0 *= 0,573,* H_0 *= 0,531, accordingly.*
Keywords: *river network, fractal dimension, self- similarity, fractal properties, self-affine*