УДК 519.24.001.57

Н.Г. Сербов, *к.г.н.*
Одесский государственный экологический университет

МНОГОФАКТОРНЫЙ СИСТЕМНЫЙ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ СРЕДНЕМЕСЯЧНЫХ РАСХОДОВ ВОДЫ НА ПРИМЕРЕ р. ДУНАЙ

На основе нового метода описания гидрологических систем, базирующегося на многофакторном системном подходе и мультифрактальном формализме, проведено численное моделирование (на примере р.Дунай) и анализ флуктуационных временных трендов среднемесячных расходов и выполнена оценка величин фрактальных размерностей.

***Ключевые слова**: метод многофакторного системного моделирования, мультифрактал, среднемесячные расходы воды.*

Введение. В настоящее время по-прежнему крайне актуальной является разработка высоко эффективных, адекватно отражающих фундаментальные особенности гидрологического цикла математических моделей, обладающих достаточно высокой степенью корректности и прогнозируемости [1-18]. Среди них традиционно выделяют так называемые динамические модели расчета и прогноза, базирующиеся на использовании гидродинамических уравнений типа Навье-Стокса или более простого варианта гидродинамических уравнений типа Сен-Венана [1]. Хотя динамические модели обладают рядом весьма важных, хорошо известных достоинств, их корректная реализация по-прежнему далека от удовлетворительного уровня. В настоящее время активно развивается альтернативное направление моделирования гидрологических характеристик, в рамках которого разработан ряд более простых в вычислительном отношении моделей типа «black-box» моделей [7-13], а также относительно новый класс моделей, основанных на использовании аппарата функций отклика [5-7]. В числе таких моделей следует упомянуть модель OSEU-Hydro-MSFR [13-18], которая основывается на многофакторном системном и мультифрактальном формализмах. Ранее бы проведены тестовые расчеты и детальное сравнение теоретических данных с данными наблюдений по среднесуточным, среднегодовым расходам, а также расходам, соответствующим экстремальным паводкам на примере р. Дунай. Как показано в указанных работах [12-17], полученные теоретические результаты продемонстрировали достаточно высокую эффективность модели OSEU-Hydro-MSFR и удовлетворительное согласие теории с данными наблюдений [11]. В данной работе на основе модели OSEU-Hydro-MSFR [12-17] впервые выполнен моделирование и анализ флуктуационных временных трендов изменения среднемесячных расходов для участка «Братислава» р.Дунай и определен спектр фрактальных размерностей, что далее важно для реализации соответствующей модели прогноза расходов воды.

Метод расчета. Поскольку искомый подход детально излагался в ряде публикаций, здесь мы ограничимся лишь изложением ключевых аспектов метода моделирования. Согласно [12,14] характеристическая функция выхода нелинейной системы определяется суммой нелинейной компоненты, определяемой мгновенным и запаздывающим откликом системы, и линейной компоненты, связанной с линейным откликом системы. Уравнение для функции выхода имеет вид

$$Q_t = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n(j)} \sum_{k=i}^{n(j)} U_{i,k}^{(j)} P_{t-i+1}^{(j)} P_{t-k+1}^{(j)} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{k(j)} U_{i+n}^{(j)} P_{t-(i+n)+1}^{(j)}, \qquad (1)$$

где j=1,2,...,J – число независимых входов (в т.ч. обусловленных дождевыми осадками), J – число мини водосборов (в сумме дающих полный водосбор), n –число временных интервалов, которые соответствуют дождевым осадкам, дающим вклад в мгновенную и запаздывающую составляющие стока (нелинейная часть общей «памяти» водосбора), l – число аналогичных временных интервалов (линейная часть общей «памяти»), $(n+l)$ – длина полной «памяти» модели, P – матрица осадков j входной серии, соответствующей j-ой мини-водосборной площади; $U_{i,k}$ – обозначает дискретные серии ординат нелинейной части функции отклика, которые суммируются в коэффициент стока, U_i – то же для линейной части.

Модель калибруется по числу серий отдельных данных по дождевым осадкам и соответствующему стоку. Уравнение (1) с учетом p (p=1, NN) числа серии данных записывается в следующем виде

$$Q_t^p = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} U_{i,k}^{(j)} P_{t-i+1}^{(j),p} P_{t-k+1}^{(j),p} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{l(j)} U_{i+n}^{(j)} P_{t-(i+n)+1}^{(j),p}. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) для калибровочной серии N значений расходов $Q_1, Q_2,.., Q_N$ естественно представимо в вектор-матричной форме

$$Q = P^{(1)}U^{(1)} + P^{(2)}U^{(2)} + \ldots + P^{(J)}U^{(J)}. \qquad (3)$$

Уравнение (1) может быть также записано в виде

$$Q = PU, \qquad (4)$$

где P – матрица размером (N , M),

$$P = \left[P^{(1)}P^{(2)}, \ldots, P^{(J)}\right] \qquad (5)$$

и $M = \sum_{j=1}^{J} \mathrm{mm}(j)$. В результате $\{P^T P\}$ является квадратной ($M \times M$) симметричной матрицей и U – ($M \times 1$) вектор (столбец). Далее решение уравнения (3) осуществляется стандартными численными методами [12-18].

Для выявления фрактальных особенностей во временных рядах флуктуаций речного стока обычно используется классическая версия мультифрактального формализма. Фундаментальной характеристикой является мультифрактальный спектр. Для однородных фракталов скейлинг описывается одной фрактальной размерностью. Неоднородные или мультифрактальные объекты обычно характеризуются спектром $D(q)$ фрактальных размерностей (фрактальная размерность равна $D(0)$, а функция $D(q)$ обычно трактуется как мультифрактальный спектр). С математической точки зрения, ключевая задача мультифрактального формализма (вычисления мультифрактального спектра) сводится к нахождению сингулярного спектра $f(\alpha)$ меры μ.

Он ассоциирует хаусдорфову размерность с сингулярным показателем α, что позволяет вычислить степень сингулярности $N_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{-f(\alpha)}$, где $N_\alpha(\varepsilon)$ есть число гиперкубов, необходимых для того, чтобы охватить меру и ε-размер каждого гиперкуба. Функция распределения Z извлекается из этого спектра

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)} \quad \text{for} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Здесь $\tau(q)$ есть спектр, который может быть получен путем преобразования Лежандра сингулярного спектра $f(\alpha)$. Соответственно, из спектра $\tau(q)$ может быть получен спектр обобщенных фрактальных размерностей. Более детально численные аспекты определения спектра на основе классического фрактального формализма изложены, например, в [3,12]. Обычно в конкретном вычислении спектра фрактальных размерностей весьма эффективным оказывается метод Grassberger-Procaccia [2], называемый также методом корреляционной размерности. В последние годы этот подход с успехом был имплементирован в многофакторный системный и мультифрактальный формализм при решении целого ряда задач гидрометеорологии, климатологии и гидроэкологии [12,19-20]. Корреляционный интеграл функции $C(r)$ для выявления различий между хаотическими и стохастическими системами, в рамках алгоритма Grassberger-Procaccia [3], определяется следующим образом

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N(k-1)} \sum_{\substack{i,j \\ (1\le i<j\le N)}} H(r - \| \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j \|), \tag{7}$$

где H – ступенчатая функция Хевисайда, $H(u) = 1$ для $u > 0$ и $H(u) = 0$ для $u \le 0$; r – радиус сферы с центром в $\mathbf{y}_i$ или $\mathbf{y}_j$; N – длина временного ряда. Если временной ряд характеризуется аттрактором, то корреляционный интеграл $C(r)$ соотносится с радиусом r посредством

$$d_2 = \lim_{\substack{r\to 0 \\ N\to\infty}} \frac{\log C(r)}{\log r}, \tag{8}$$

где d_2 – корреляционная размерность, которую можно определить как наклон линии в координатах $\log C(r)$ и $\log r$ посредством среднеквадратического подбора прямой линии в некотором диапазоне r, называемом диапазоном масштабирования. Фактически искомый алгоритм позволяет непосредственно получить данные о фрактальных свойствах системы, а также крайне важную информацию о поведении динамических переменных системы.

Результаты расчета и выводы. Автором выполнено численное моделирование и анализ флуктуационных временных трендов изменения среднемесячных расходов на участке от станции Devin (Bratislava) до станции Achleiten р. Дунай в период с 1901г. по 2008гг. Детальное описание искомого участка дано в работе [11]. Модельный расчет в целом продемонстрировал физическое согласие рассчитанных и эмпирических значений среднемесячных расходов воды на. Анализ показывает, что предложенная модель обеспечивает прогноз временных флуктуаций среднемесячных расходов воды в близком согласии (отличие не превышает 10%) с эмпирическими данными [11]. Исходные данные по среднемесячным расходам воды на участке от станции Devin (Bratislava) до станции Achleiten р. Дунай в период с 1901г. по 2008гг. представлены на рис.1. Далее была выполнена оценка спектра фрактальных размерностей для временного ряда среднемесячных расходов воды на этом участке. Расчет показал, что соответствующие фрактальные размерности лежат в интервале [1.35-1.95]. Зная соответствующий мультифрактальный спектр, далее решается задача восстановления и прогноза среднемесячных расходов в любом интересующем интервале [6,8,15].

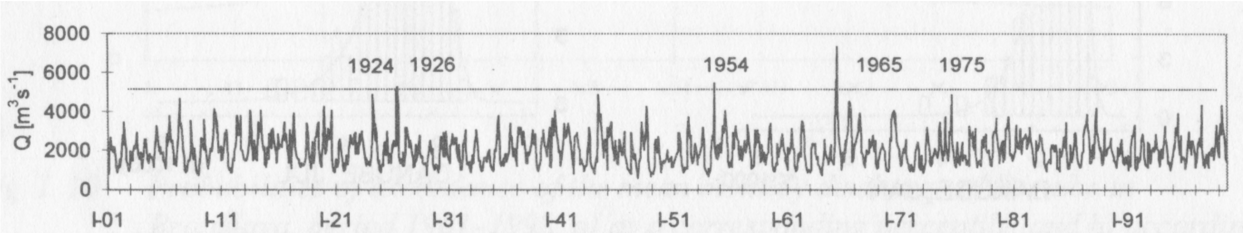

Рис. 1 – Среднемесячныерасходы воды на участке от станции Devin (Bratislava) до станции Achleiten р. Дунай в период с 1901 по 2008гг.

Подробно версия OSEU-Chaos-FRC метода прогноза характеристик стохастических систем изложена в работах [19-20] и базируется на формализме Grassberger-Procaccia [3] и нелинейном алгоритме прогноза [12,13]. В заключение следует обратить внимание на численную близость полученных нами значений фрактальных размерностей в случае среднемесячных расходов воды с аналогичными значениями, характерными для динамических величин родственных гидрометеорологических и экологических систем [19-20], для которых также свойственно хаотическое поведение характеристических динамических переменных. Искомый эффект свидетельствует о проявлении более фундаментального феномена генезиса фрактальных размерностей в родственных (диссипативных, фрустрированных) динамических системах.

Список литературы

1. *Кучмент Л.С, Демидов В.Н, Мотовилов Ю.Г.* Формирование речного стока. -М.: Наука,1993, 357с.
2. *Islam M.N., Sivakumar B.* Characterization and prediction of runoff dynamics: a nonlinear dynamical view// Adv.Water Res.-2002.-V.25, № 2- P.179-190.
3. *Grassberger P, Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D.-1983.-Vol.9,№1-2.-P.189-208.
4. *Лобода Н.С.* Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменений под влиянием факторов антропогенной деятельности// Метеорология, климатология и гидрология.-2002.-№45.-С.140-146.
5. *Гопченко Е.Д., Романчук М.Е.* Математическая модель для расчета характеристик экстремально высоких паводков и половодий на территории Придунайских озер// Метеорология, климатология и гидрология.-2001.-№42.-С.39-50.
6. *Найпал С., Иваненко А.Г.* Стохастическая модель гидрографа рек Суринама // Метеорология, климатология и гидрология.-1993.-№29.-С.32-47.
7. *Maftuoglu R.F.* New models for non-linear catchment's analysis// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1984.-Vol.73.-P.335-357.
8. *Maftuoglu R.F.* Monthly runoff generation by non-linear models// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1991.-Vol.125.-P.277-291.
9. *Kothyari U.C., Arvanmuthan V., Singh V.P.* Monthly runoff generation using the linear perturbation model// J.Hydrol.-1993.-Vol.144.-P.371-379.
10. *Stewart M.D., Bates P.D., Anderson M.G., Price D.A., Burt T.P.* Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1999.-Vol.223.-P.85-106.

11. *Svoboda A., Pekarova P., Miklanek P.* Flood hydrology of Danube between Devin and Nagymaros in Slovakia.- Nat. Rep.2000 of the UNESKO.-Project 4.1.-Intern.Water Systems.-2000.-96P.
12. *Loboda N.S., Glushkov A.V., Khokhlov V.N.* Using meteorological data for reconstruction of the annual runoff series over an ungauged area: Empirical orthogonal functions approach to Moldova-Southwest Ukraine region//Atmospheric Research (Elsevier; The Netherlands). -2005.-Vol.77.-P.100-113.
13. *Глушков А.В., Балан А.К.* Многофакторный мультифрактальный подход в задачах моделирования стока и краткосрочном гидрологическом прогнозе (на примере р. Дунай) // Метеорология, климатология, гидрология.-2004.-№48.-С.392-396.
14. *Глушков А.В., Балан А.К.* Застосування апарату вейвлент-перетворень та мульті-фрактального підходу до вивчення стохастичних флуктуацій річкового стоку (на пр.р.Дунай) // Метеорология, климатология, гидрология.-2005.-№49.-С.505-510.
15. *Сербов Н.Г., Балан А.К., Соляникова Е.П.* Многофакторный системный и мульти-фрактальный подходы в моделировании экстремально высоких паводков (на примере р. Дунай) и временных флуктуаций концентраций загрязняющих веществ в речной воде// Вестник ОГЭКУ.-2008.-N6.-С.7-13.
16. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Lovett L.* Using non-decimated wavelet decomposition to analyse time variations of North Atlantic Oscillation, eddy kinetic energy, and Ukrainian precipitation // Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands). – 2006. – Vol. 322. – No. 1-4. – P. 14-24.
17. *Глушков А.В., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Балан А.К., Бунякова Ю.Я., Баланюк Е.П.* Низкоразмерный хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере и гидросфере// Вестник ОГЭКУ.-2007.-N4.-С.337-348.
18. *Глушков А.В., Лобода Н.С., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Свинаренко А.А., Бунякова Ю.Г.* Хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере: краткосрочный прогноз// Вестник ОГЭКУ.-2008.-N5.-С.225-235.
19. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Serbov N.G., Zhurbenko K.* Signatures of low-dimensional chaos in hourly water level measurements at coastal site of Mariupol, Ukraine// Stoch. Environment Res. Risk Assess. (Springer).-2008.-Vol.22,N6.-P.777-788.
20. *Khokhlov V.N., Glushkov A.V., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Y.* Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method//Atmospheric Environment (Elsevier; The Netherlands).-2008.-Vol.42.-P.7284–7292.

Багатофакторний системний та мультифрактальний підходи до моделювання середньомісячних витрат води на прикладі р. Дунай. Сербов М.Г.

На підставі нового методу опису характеристик гідрологічних систем, який базується на багатофакторному системному підході і мультифрактальному формалізмі, проведено чисельне дослідження флуктуаційних часових трендів змінення середньомісячних витрат води (на прикладі р. Дунай) й визначені значення відповідних фрактальних розмірностей.

***Ключові слова**: метод багатофакторного системного моделювання, мультифрактал, середньомісячні витрати води*

A multi-factor systems and multi-fractal approaches in modelling the mean monthly discharges on the example of the Danube river. Serbov N.G.

It is carried out numerical modelling fluctuate temporal trends for mean monthly discharges (r. Danube) within a new method of description for the hydrological systems. The latter is based on the combining multi-factor systems approach and multi-fractal formalism. It is calculated a spectrum of the fractal dimensions.

***Kew words**: multi-factor systems approach, multi-fractal, mean monthly discharges*