

УДК 551.551

С.Н Степаненко, д.ф.-м.н., В.Г. Волошин, к.т.н.  
Одесский государственный экологический университет

## АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ В ГАУССОВЫХ МОДЕЛЯХ РАССЕЙЯНИЯ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

*Анализируется поведение гауссовой функции плотности распределения концентрации, которая представляет вертикальное рассеяние примеси от непрерывно действующего точечного источника. Показано, что когда масштаб турбулентного вертикального рассеяния становится равным или большим эффективной высоты источника мода функции приближается к границе  $z = 0$  и остается на ней при дальнейшем движении клуба примеси по направлению потока. Форма клуба изменяет свою конфигурацию и описывается эллипсоидом вращения с ориентацией осей в зависимости от соотношения между масштабами диффузии. Вертикальный профиль концентрации в приземном слое хорошо восстанавливается бигауссовой функцией плотности распределения концентрации, что подтверждается результатами опытов.*

**Ключевые слова:** вертикальное рассеяние примеси, точечный источник, функция плотности распределения концентрации.

**Введение.** В задачах охраны атмосферного воздуха от загрязнения выбросами промышленных предприятий, широкое распространение получили различные модификации гауссовых моделей [1,4]. В настоящее время практически во всех странах модели такого типа доминируют в нормативных документах, определяющих правила расчета приземных полей концентраций.

В моделях гауссового типа предполагается, что рассеяние нейтрально-плавающей примеси в трехмерном пространстве происходит по нормальному закону распределения при условии сохранения термодинамических условий атмосферы и постоянства вектора скорости ветра. Учет ряда иных факторов, влияющих на перенос, рассеяние и осаждение примеси, выполняется введением различных поправок, которые позволяют учесть, например, отражение примеси от границ слоя рассеяния, взаимодействие примеси с поверхностью, сухое и влажное осаждение, химические превращения и пр. эффекты. Эти поправки достаточно полно описаны в работе [1]. Все это свидетельствует о высокой теоретической проработке и практической надежности гауссовых моделей.

Гауссова модель рассеяния примеси для учета ее отражения от поверхности использует, так называемый, “зеркальный” источник, что ведет к образованию бимодальной функции плотности распределения концентрации. Положение мод этой функции видоизменяются по мере увеличения времени диффузии примесей.

**Цель статьи** – исследование бимодальной функции плотности распределения концентрации примеси в зависимости от изменения соотношения вертикального масштаба диффузии и эффективной высоты источника примеси.

**Объект исследования** – гауссова модель атмосферной диффузии и ее особенности.

**Методы исследования.** Трехмерное поле концентрации образуется в результате переноса облака примеси от точечного источника загрязнения атмосферы как в направлении вектора скорости ветра  $U_r$  (вдоль оси  $X$ ), так и в перпендикулярном вектору переноса горизонтальном (по оси  $Y$ ) и вертикальном (по оси  $z$ ) направлении.

Поле концентрации примеси в любой точке рассматриваемого пространства в различные моменты времени  $t$  может быть определено с помощью исходной функции, вытекающей из гауссовой статистической модели факела

$$q(x_r, t) = \frac{Q(x_s, t_s)}{U} \cdot \varphi_x(x_r, t_r), \quad (1)$$

где  $q(x_r, t)$  – разовая концентрация примеси ( $\Gamma \cdot \text{м}^{-3}$ );  $x_r$  – координаты точки ( $r=1, 2, 3$  или  $x, y, z$ ), для которой определяется концентрация примеси;  $x_s$  – координаты расположения источника примеси;  $z_s$  – эффективная высота источника (м);  $t_s, t_r$  – момент выброса примеси из источника и момент измерения концентрации в точке рецептора  $x_r$ , соответственно;  $\varphi_x(x_r, t_r)$  – функция плотности распределения (ФПР) концентрации в облаке примеси в окрестностях точки с координатами  $x_r$  ( $\text{м}^{-2}$ );  $Q(x_s, t_s)$  – эмиссии непрерывного точечного источника  $Q$  ( $\Gamma \cdot \text{с}^{-1}$ );  $U$  – скорость ветра ( $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ ).

Функция  $\varphi_x(x_r, t_r)$  образована гладкими функциями ФПР в направлении соответствующих координатных осей. Для среды, движущейся вдоль оси  $OX$  со скоростью потока  $U$ , функции плотности распределения концентрации вдоль осей  $OY$  и  $OZ$  имеют вид:

$$\varphi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp \left[ -\frac{(y_r - y_s)^2}{2\sigma_y^2} \right], \quad (2)$$

$$\varphi_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \left\{ \exp \left[ -\frac{(z_r - z_s)^2}{2\sigma_z^2} \right] + \beta \exp \left[ -\frac{(z_r + z_s)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $\sigma_y(t), \sigma_z(t)$  – масштабы рассеяния, являющиеся функциями времени и зависящие от метеорологических условий.

Функции (2) соответствует распределению концентрации по оси  $Y$ , а функция (3) распределению концентрации в вертикальной плоскости, по оси  $Z$ . В том случае, когда рассеяние примеси происходит в неограниченном пространстве  $-\infty < z < \infty$  второе слагаемое, в фигурных скобках уравнения (3), отсутствует, т.е. коэффициент  $\beta$ , учитывающий отражение примеси от нижней границы принимается равным нулю  $\beta=0$ .

Если рассеяние осуществляется в полупространстве  $0 \leq z < \infty$ , то для учета отражения примеси от поверхности  $z=0$  необходимо ввести виртуальный (зеркальный) источник с ординатой  $-z_s$  и, тогда коэффициент отражения  $\beta$  принимает значение равное единице  $\beta=1$ . Горизонтальная плоскость  $XU$  представляет собой границу, которая разделяет реальный (direct), расположенный на высоте  $z_s$  и виртуальный (indirect) на высоте  $-z_s$  источники. На границе  $z=0$ , функция плотности (3) должна обеспечить выполнение условия

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (4)$$

В области  $0 \leq z < \infty$  функция (3) представляет усеченное нормальное

распределение на полупрямой и обладает свойством ФПР, поскольку  $\varphi_3(x_r) > 0$  и существует условие нормировки  $\int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 1$ .

Функцию  $\varphi_3(z)$  можно представить как бигауссовскую функцию плотности нормально распределенных случайных величин с равными дисперсиями  $\sigma_z^2$ . На рис.1 функции плотности нормально распределенных величин с модами в точках ( $z_s$ , реальный источник) и ( $-z_s$ , виртуальный источник) показаны сплошными линиями, а суммарное распределение пунктирной линией. Реально функции  $\varphi_3(z)$  соответствует только половина пунктирной кривой в области  $z \geq 0$ .

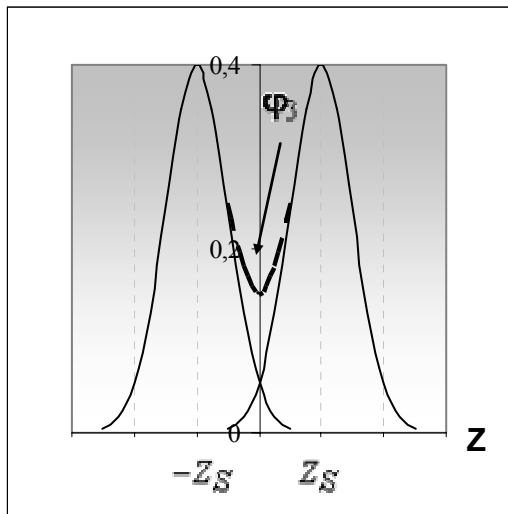


Рис. 1– Функция плотности распределения для реального ( $z_s > 0$ ) и виртуального ( $z_s < 0$ ) источника (сплошные линии) и функция  $\varphi_3(z)$  (пунктирная линия) при  $\beta = 1$ .

**Результаты исследования и их анализ.** Рассмотрим изменение положения моды функции  $\varphi_3(z)$  на полупрямой  $z \geq 0$  за период диффузии примеси в полупространстве  $z \geq 0$ .

Преобразуем  $\varphi_3(z)$ , введя новые переменные [2, 4]

$$\frac{z}{z_s} = \delta, \quad \frac{\sigma_z}{z_s} = \varepsilon, \quad \sqrt{2\pi} \varphi_3(z) z_s = \tilde{\varphi}$$

и перепишем (3) в виде

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\delta-1)^2}{2\varepsilon^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(\delta+1)^2}{2\varepsilon^2} \right] \right\}. \quad (5)$$

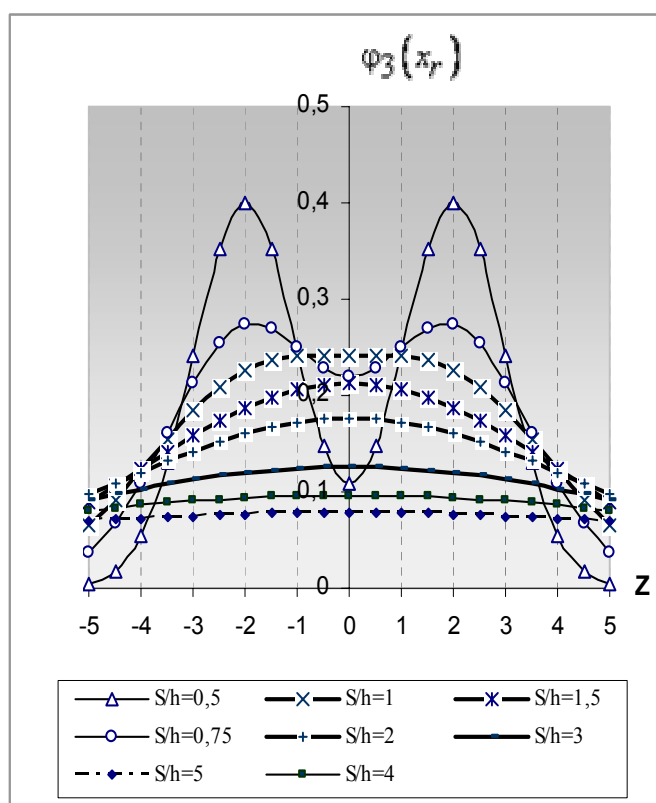
Продифференцируем функцию (5) по переменной  $\delta$  и приравняем результат нулю ( $d\tilde{\varphi}/d\delta = 0$ ), получим

$$(\delta-1) \exp \left[ -\frac{(\delta-1)^2}{2\varepsilon^2} \right] + (\delta+1) \exp \left[ -\frac{(\delta+1)^2}{2\varepsilon^2} \right] = 0, \quad (6)$$

где корнями уравнения (6) будут  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_2$ , как корень уравнения

$$\varepsilon^2 = \frac{2\delta}{\ln[(1+\delta)/(1-\delta)]}$$

Анализ показывает, что если  $\varepsilon^2 = 1$ , то функция (5) имеет одну характерную критическую точку  $\delta_2 = z_{кр}/z_s = 0$ , в которой первая и вторая производная  $d\tilde{\varphi}/d\delta = d^2\tilde{\varphi}/d\delta^2 = 0$ . В этой точке наблюдается модальное значение функции  $\varphi_3(x_r)$  в области  $z \geq 0$ . Если  $\varepsilon^2 > 1$ , функция (5) имеет точку максимума, для которой  $d\tilde{\varphi}/d\delta = 0$ ,  $d^2\tilde{\varphi}/d\delta^2 < 0$  (рис. 2).

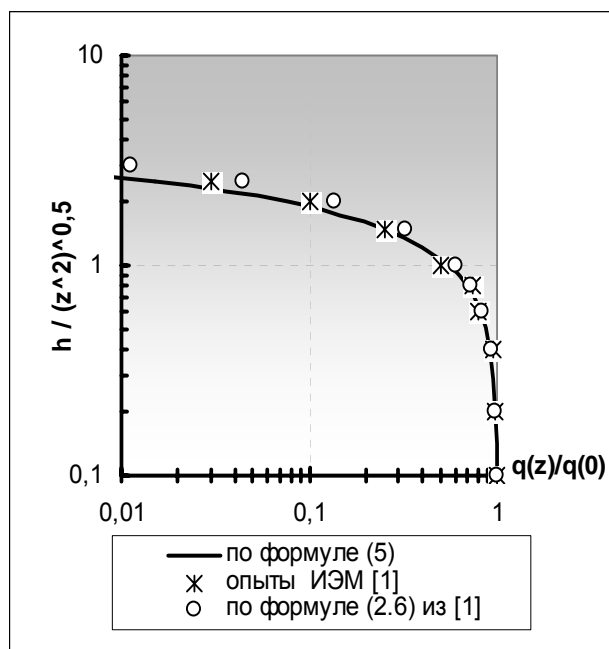


Таким образом, по мере роста параметра  $\delta = S/h$  (где  $S = \sigma_z$  и  $h = z_s$ ) бимодальная гауссова функция преобразуется в одномодальную, мода которой совпадает с границей раздела ( $z = 0$ ) источников, имеющих координаты  $z_s$  и  $-z_s$ .

В начальный момент времени, когда  $S/h \ll 1$ , модальные значения функции совпадают с осью дымового факела ( $z = h$ ). Далее, когда  $S/h \geq 1$ , бигауссова функция преобразуется в одномодальную, а значение максимума функции  $\varphi_3(z)$  изменяется, в зависимости от изменения параметра  $\delta = S/h$ .

Рис. 2– Видоизменение функции  $\varphi_3(z)$  в зависимости от соотношения вертикального масштаба диффузии и эффективной высоты источника.

По мере увеличением времени диффузии ( $t = x/U$ ), когда масштаб вертикального рассеяния становится равным или большим эффективной высоте источника, т.е. когда отношение  $\sigma_z/h \geq 1$ , мода функции  $\varphi_3(z)$  “снижается” до границы  $z_r = 0$  и остается на этой границе при распространении примеси вдоль направления потока. Из рис. 2 следует, что начиная с момента, когда  $\sigma_z/h \geq 3$ , функция плотности распределения в области  $z > 0$  не обладает ярко выраженным максимумом и вертикальное распределение концентрации в приземном слое атмосферы может быть представлено формулой (5).



На рис. 3 показано изменение концентрации  $q(z)$  с высотой, нормированная на свое приземное значение. Сплошная кривая построена по формуле (5), точки «×» соответствуют расчетам по формуле Паскуилла (проекта Прейри-Грассе” [1, стр.87])

$$\frac{q(z)}{q(0)} = \exp \left[ -A \left( z / \sqrt{\bar{z}^2} \right)^s \right], \quad (7)$$

а точки «\*» - результатам опытов Института экспериментальной метеорологии (г. Обнинск).

Рис.3 – Зависимость нормированной концентрации  $q(z)/q(0)$  от нормированной высоты  $\xi = z/(\bar{z}^2)^{-0.5}$ .

Для всех расчетов использовались параметры  $A=0,5, s=2, \sigma_z=1, h=0,5\text{м}$ .

Результаты, на удивление, близки между собой, откуда следует, что вертикальный профиль концентрации в приземном слое хорошо представляет не только эмпирическая формула (7), подтвержденная опытными данными, но и теоретическая зависимость типа (5). Эти совпадения свидетельствуют о правомерности гауссовых функций для описания процесса диффузии в атмосфере.

Перепишем выражение для трехмерной функции плотности распределения концентрации  $\varphi_x(x_r, t_r)$  от мгновенного точечного источника в виде гауссовой статистической модели

$$\varphi_x(x_r, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left\{ -\frac{[x - x_s - U(t - t_s)]^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_r - y_s)^2}{2\sigma_y^2} \right\} \times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z_r - z_s)^2}{2\sigma_z^2} \right] + \beta \exp \left[ -\frac{(z_r + z_s)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Как и в уравнениях (2) и (3), если  $\beta = 0$ , уравнение (8) описывает поле концентрации примеси в неограниченном пространстве  $-\infty < z < \infty$ . Если  $\beta = 1$ , наблюдается полное отражение примеси от поверхности  $z = 0$  при условии, что подстилающая поверхность полностью непроницаема для примеси.

С помощью условия

$$\frac{\partial q}{\partial x_r} = 0 \quad (9)$$

можно определить геометрическое место точек максимума поля концентрации в момент времени  $t_i$ .

Для неограниченного пространства параметрическое уравнение геометрического места точек имеет вид

$$x_{\max}(t) = [x = (u \cdot t); y; z_s]. \quad (10)$$

Для полупространства ( $\beta = 1$ ) положение этих точек определяется функцией

$$x_{\max}(t) = [x=ut; y; \tilde{z}(t)], \quad \text{где } \tilde{z}(t) = \arg \max_{z \geq 0} \tilde{\varphi}[z(t)]. \quad (11)$$

Здесь

$$\tilde{\varphi}[z(t)] = \left\{ \exp \left[ -\frac{(z_r(t) - z_s)^2}{2\sigma_z^2(t)} \right] + \exp \left[ -\frac{(z_r(t) + z_s)^2}{2\sigma_z^2(t)} \right] \right\}. \quad (12)$$

Координата  $\tilde{z}(t)$  при  $\sigma_z(t)/z_s < 1$  выражается неявной зависимостью вида

$$\left[ \frac{\sigma_z}{z_s} \right]^2 = \frac{\tilde{z}(t)}{z_s} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\tilde{z}(t)}{z_s} \right].$$

Используя уравнения (11),(12) и (8), можно найти промежуток времени  $T$ , в течение которого в образовавшемся поле рассеянной примеси концентрация будет удовлетворять условию

$$q(x, y, z) \geq C_{\text{ПДК}}, \quad (13)$$

т.е. будет равна или больше предельно допустимых значений (ПДК). Естественно, при  $t_{kp} > T$ , концентрации в любой точке пространства будут меньше  $C_{\text{ПДК}}$ .

Для неограниченного пространства промежуток времени  $T$ , удовлетворяющий условию (12), находится из уравнения

$$C_{\text{ПДК}} (2\pi)^{3/2} \sigma_x(t) \sigma_y(t) \sigma_z(t) = Q, \quad (14)$$

которое решается численно в направлении равноправных координатных осей для нахождения геометрического места точек, представляющих поверхность  $C(x, y, z) = C_{\text{ПДК}}$  в момент времени  $t_{kp} \approx T$ .

В полупространстве, при условии что  $\sigma_z(t)/z_s \geq 1$ , уравнение должно быть задано в следующем виде

$$C_{\text{ПДК}} (2\pi)^{3/2} \sigma_x(t) \sigma_y(t) \sigma_z(t) = 2Q \exp \left( -\frac{z_s^2}{2\sigma_z^2} \right). \quad (15)$$

Известно, что в качестве модели дымового факела точечного стационарного источника можно принять суперпозицию дымовых клубов (облаков) примеси конечных размеров, которые сразу же, после выброса из источника, сносятся ветром, а на их месте образуются новые. Клуб (облако) есть множество точек пространства, в которых в фиксированный момент времени  $t \in [0, T]$  соблюдается условие  $q(x, y, z) \geq C_{\text{ПДК}}$ .

Расчет по уравнению (8) показывает, что изоповерхность  $C_{\text{ПДК}}$ , соответствующая форме клуба примеси от точечного стационарного источника в полупространстве, в момент  $t_{kp} \approx T$  может изменять свою конфигурацию, приобретая форму:

а) если  $\sigma_z(t)/z_s \ll 0,75$ , то это эллипсоид, соотношение осей которого будет зависеть от соотношения масштабов диффузии в направлении соответствующих координатных осей;

б) если  $0,75 < \sigma_z(t)/z_s \leq 1$ , то это эллипсоид, в нижней части которого, примыкающей к поверхности, образуется шаровой сегмент;

в) если  $\sigma_z(t)/z_s \gg 1$ , то это половина эллипсоида, центральная плоскость которого находится на подстилающей поверхности, а ориентация горизонтальных осей и высота вертикальной оси зависят от соотношения масштабов диффузии;

г) если источник находится на поверхности  $z_s = 0$  и  $U = 0$ , то форма изоповерхности  $C_{\text{ПДК}}$ , представляет шаровой сегмент, основание которого находится на уровне  $z \approx 0$ .

В неограниченном пространстве, в случае изотропной турбулентности, изоповерхность  $C_{\text{ПДК}}$ , с геометрической точки зрения, представляет идеальную сферу, когда условия диффузии во всех направлениях равны ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ ), или эллипсоид вращения, ориентация осей которого зависит от масштабов диффузии в направлении соответствующих осей.

**Заключение.** Анализ бимодальной гауссовой функции плотности вертикального распределения концентрации показал, что модальное значение функции по мере увеличения времени диффузии, когда масштаб вертикального рассеяния становится равным или большим эффективной высоты источника, “снижается” до границы  $z_f = 0$ . При дальнейшем распространении примеси в направлении потока модальное значение функции остается на нижней границе. Форма клуба (облака) примеси по мере движения изменяет свою конфигурацию и описывается эллипсоидом вращения с ориентацией осей в зависимости от соотношения между масштабами диффузии.

Вертикальный профиль концентрации  $q(z)$  в приземном слое, если  $\sigma_z/h \geq 1$ , хорошо восстанавливается теоретической зависимостью типа (5), т.е. бигауссовой функцией плотности распределения, что подтверждается результатами опытов Института экспериментальной метеорологии (г. Обнинск).

### Список литературы

1. Бызова Н.Л., Гаргер Е.Г., Иванов В.Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примесей.- Л.: Гидрометеиздат, 1991, -273 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (определения, формулы, теоремы).- Наука, М., 1973. -450с
3. Математические методы в технике и технологиях. XV международная научная конференция, Сб. Тр. Т. 4. Секция 4, изд. ТГТУ, 2002. -34-48с
4. Степаненко С.Н. Динамика турбулентно-циркуляционных и диффузионных процессов в нижнем слое атмосферы. Одесса. 1998. -280 с.
5. Степаненко С.Н, Волошин В.Г. Применение вероятностного подхода к оценке экологической опасности высокого уровня загрязнений атмосферы // Украинский гидрометеорологический журнал. 2006.- №1, Одесса, ТЕС, - 14-23с.

**Аналіз функцій щільності розподілу концентрацій в гауссових моделях розсіяння домішок в атмосфері. С. М. Степаненко, В. Г. Волошин**

*Аналізується поведінка функції щільності розподілу концентрації, яка представляє вертикальне розсіяння домішки від безперервно діючого точкового джерела. Показано, що коли масштаб турбулентного вертикального розсіяння є рівним або більшим ніж ефективна висота джерела, мода функції наближається до межі  $z = 0$  і залишається на цій межі при подальшому русі домішки уздовж напрямку потоку. Форма клубу домішки від точкового джерела трансформує свою конфігурацію і описується еліпсоїдом обертання з орієнтацією осей залежно від співвідношення між масштабами дифузії. Вертикальний профіль концентрації в приземному шарі добре відновлюється бігауссовою функцією щільності розподілу, що підтверджується результатами дослідів.*

**Ключові слова.** вертикальне розсіяння, точкове джерело забруднення, функція щільності розподілу концентрації.

**Analysis of function of density of distributing of concentration in models Gaussian of dispersion of admixtures in atmosphere. With. M. Stepanenko, In. G. Voloshin**

*The conduct of function of density of distributing (p.d.f) of concentration which presents vertical dispersion of admixture from a continuously operating point source is analyses. It is shown, that when the scale of vertical dispersion is equal or the more of effective height of source fashion of function approaches a border  $z = 0$  and remains on this border at further motion of volume of smoke puff of admixture along streamline. The form of puff as far as motion changes the configuration and is described by the ellipsoid of rotation with the orientation of axes depending on correlation between the scales of diffusion. The vertical structure of concentration in the ground layer is well restored by the bigaussien function of closeness of distributing, that is confirmed by the results of experiments.*

**Keywords.** dispersion of pollution, point source, functions of density of distributing of concentration.