

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА

В статье исследуется возможность экстраполяции дискретных сигналов с использованием скалярных и векторных фильтров Калмана.

Ключевые слова: экстраполяция, скалярный фильтр Калмана, векторный фильтр Калмана, оптимальная оценка.

Введение. Фильтры Калмана используются в компьютерной цифровой обработке гидрометеорологической информации, ГИС. Недостаточно рассмотренными являются вопросы, связанные с теорией экстраполяции дискретных сигналов для данных фильтров [1,2,3,4].

Материалы и методы исследования. В статье исследуется методика экстраполяции дискретных сигналов с использованием скалярных и векторных фильтров Калмана.

Цель данной статьи – исследования возможностей скалярных и векторных фильтров Калмана в процессе экстраполяции дискретных сигналов.

Изложение основного материала статьи.

1 Скалярный фильтр Калмана

1.1 Модель сигнала

Оцениваемый случайный сигнал моделируется как рекурсивный процесс белого шума первого порядка с нулевым средним значением, меняющийся во времени в соответствии с динамическим уравнением

$$x(k) = ax(k-1) + w(k-1). \quad (1)$$

На рис.1 представлена модель формирования такого случайного сигнала (рис.1,а) и модель его измерения (рис.1,б).

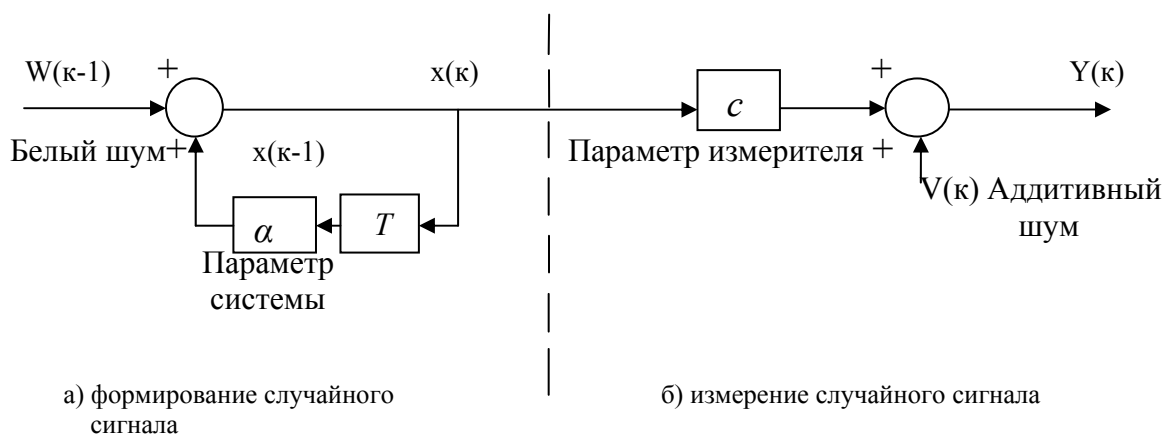


Рис. 1 - Модель формирования и измерения случайного сигнала.

В этой модели $x(0) = 0$, то есть начальное значение выборки сигнала равно нулю – $x(k) = 0$ и $w(k) = 0$ при $k \leq 0$.

Дисперсия и корреляционная функция определяются как:

$$E[w(k)] = 0; \quad E[w(k)w(j)] = \begin{cases} 0, k \neq j; \\ \sigma_w^2, k = j. \end{cases} \quad (2)$$

При $\sigma_w^2 = 0$ процесс белого шума отсутствует; для $a = 1$ при начальных условиях $x(0) = x \neq 0$ имеем $x(k) = x(k-1)$ с постоянным параметром сигнала x .

Случайный процесс (1) можно представить [2] процессом авторегрессии первого порядка. Его статистические параметры:

$$E[x(k)] = 0;$$

$$E[x^2(k)] = P_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2}; \quad (3)$$

$$E[x(k) \times V(k+j)] = P_x(j) = a^{|j|} \times P_x(0), \quad (4)$$

где j - интервал между выборками; $P_x(j)$ - автокорреляционная функция случайного процесса.

При $j = 0$

$$\begin{aligned} P_x(0) &= E[x^2(k)] = E[ax(k-1) + w(k-1)]^2 = \\ &= a^2 E[x^2(k-1)] + E[w^2(k-1)] + 2aE[x(k-1) \times w(k-1)], \\ P_x(0) &= a^2 P_x(0) + P_w(0). \end{aligned}$$

При $P_x(0) = \sigma_x^2$, $P_w(0) = \sigma_w^2$, получаем уравнение (3). Результат соответствует стационарному состоянию фильтра в течение длительного времени, когда

$$E[x^2(k)] = E[x^2(k-1)].$$

Когда третий член предыдущего уравнения равен нулю, то

$$E[x(k-1) \times w(k-1)] = E\{[ax(k-2) \times w(k-2)]w(k-1)\} = 0. \quad (5)$$

Для $j = 1$

$$\begin{aligned} P_x(1)E[x(k) \times x(k-1)] &= E\{x(k)[ax(k) + w(k)]\} = \\ &= aE[x^2(k)] + E[x(k) \times w(k)] = aP_x(0). \end{aligned}$$

Здесь второй член равен нулю в соответствии с (5).

Для $j = 2$

$$\begin{aligned} P_x(2)E[x(k) \times x(k+2)] &= E\{x(k)[ax(k-1) + w(k+1)]\} = \\ &= aE[x(k) \times x(k+1)] + E[x(k) \times w(k+1)] = aP_x(1) = a^2 P_x(0). \end{aligned}$$

И так далее для других значений j . При отрицательных j результат аналогичен, и $P_x(j) \neq 0$ для любых j оно уменьшается, когда $|j|$ возрастает, и колеблется между положительными и отрицательными величинами, когда a отрицательно.

Параметр a является постоянной величиной времени процесса – чем ближе a стремится к 1, тем медленнее процесс с большими интервалами между выборками [1]. Линейный измеритель случайного процесса, представленный на рис.1,б, описывается уравнением

$$y(k) = cx(k) + V(k), \quad (6)$$

где $x(k)$ - сигнал, меняющийся во времени; a - параметр измерителя; $V(k)$ - независимый аддитивный белый шум с нулевым средним и дисперсией σ_v^2 .

1.2 Оптимальный рекурсивный фильтр Калмана

Алгоритм рекурсивного измерителя представляется в виде:

$$\hat{x}(k) = a(k) \times \hat{x}(k-1) + v(k) \times y(k). \quad (7)$$

Здесь первый член - взвешенная предыдущая оценка; второй член – взвешенная текущая информация.

Величина $\hat{x}(k)$ - это оценка параметра x только для одного значения информации в момент k .

Используя уравнение (7), необходимо определить “лучшую” оценку с минимальной средней квадратической ошибкой.

При этом из минимума средней квадратической ошибки следует что:

$$P(k) = E[e^2(k)]; e(k) = \hat{x}(k) - x(k), \quad (8)$$

где $e(k)$ - ошибка, определяются $a(k)$ и $v(k)$ - весовые параметры.

Сделав замену $\hat{x}(k)$ в уравнении (7), получаем

$$P(k) = E[a(k) \times \hat{x}(k-1) + v(k) \times y(k) - x(k)]^2. \quad (9)$$

Продифференцировав по $a(k)$ и $v(k)$, найдем:

$$\frac{dP(k)}{da(k)} = 2E[a(k) \times \hat{x}(k-1) + v(k) \times y(k) - x(k)] \hat{x}(k-1) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{dP(k)}{dv(k)} = 2E[a(k) \times \hat{x}(k-1) + v(k) \times y(k) - x(k)] y(k) = 0; \quad (11)$$

или

$$E[e(k) \times \hat{x}(k-1)] = 0; \quad (12)$$

$$E[e(k) \times y(k)] = 0. \quad (13)$$

Пара уравнений (12) и (13) является ортогональной при оценке результатов измерений, она позволяет определить взаимную зависимость между $a(k)$ и $v(k)$

$$a(k) = a[1 - cv(k)]. \quad (14)$$

Подставив (14) в (7), получим

$$\hat{x}(k) = a\hat{x}(k-1) + v(k)[y(k) - ac\hat{x}(k-1)]. \quad (15)$$

Здесь первый член уравнения – лучшая оценка; $\hat{x}(k)$ без какой – либо дополнительной информации – экстраполяция, основная на последнем измерении. Второй член – поправка, определяемая разностью нового значения выборки и оценки измерения, с переменным весовым фактором. Это показано на рис. 2, где представлена модель оптимального рекурсивного фильтра Калмана.

Весовая функция $v(k)$ представляется в виде

$$v(k) = \frac{c[a^2P(k-1) + \sigma_w^2]}{\sigma_v^2 + c^2\sigma_w^2 + c^2a^2P(k-1)}, \quad (16)$$

средняя квадратическая оценка определяется как

$$P(k) = \frac{1}{c} \sigma_v^2 \cdot v(k), \quad (17)$$

т.е. $P(k)$ и $v(k)$ имеют прямую зависимость.

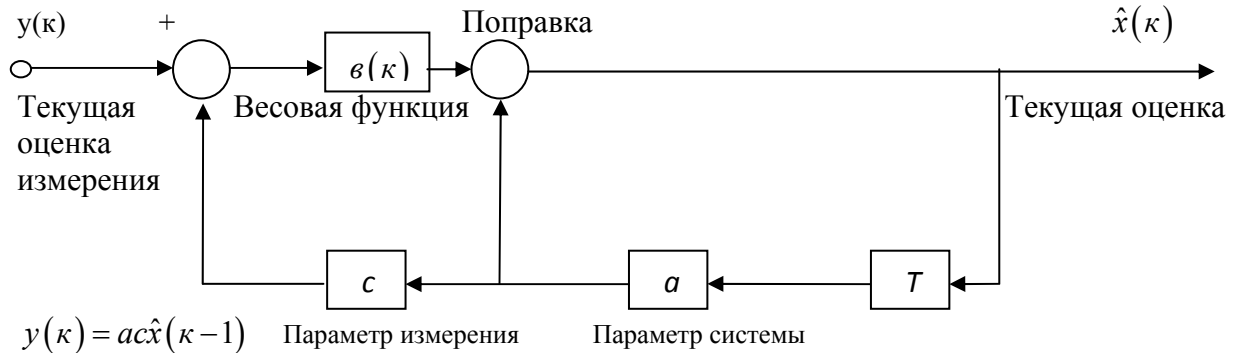


Рис. 2 - Модель оптимального рекурсивного фильтра Калмана.

При $a = c = 1$, $\sigma_w^2 = 0$, получаем для нерекурсивного измерителя

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} = \frac{1}{1 + P(k)/\sigma_v^2}. \quad (18)$$

В отличие от систем с нерекурсивной оценкой $\hat{x}(1)$, основанных на первом измерении (как на рис.1,а), получаем величину $\hat{x}(0)$ с минимизацией:

$$P(0) = E[x(k) - \hat{x}(0)]^2; \quad \frac{dP(0)}{d\hat{x}(0)} = -2E[x(k) - \hat{x}(0)] = 0,$$

Или $\hat{x}(0) = E[x(k)]$, то есть лучшая оценка $\hat{x}(0)$ - это среднее значение $x(k)$.

Для $\hat{x}(0) = 0$ и первой выборки информации $y(1)$ из уравнения (5) имеем $\hat{x}(1) = v(1) \cdot y(1)$.

Здесь, при $E\{[x(1) - \hat{x}(1)]y(1)\} = 0$, где $y(1) = x(1) + V(1)$ и $c = 1$,

$$v(1) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_v^2}.$$

Для $\sigma_v^2 = \sigma_w^2$, $a^2 = \frac{1}{2}$, из уравнения (3) имеем $\sigma_w^2 = 2\sigma_v^2$, и в данном случае

$$v(1) = \frac{2}{3} = 0,67.$$

Аналогично при этих значениях из уравнения (5) получаем:

$$P(1) = \frac{2}{3} \sigma_v^2; \quad v(2) = \frac{a^2 P(1) + \sigma_w^2}{\sigma_v^2 + \sigma_w^2 + a^2 P(1)} = \frac{4}{7}.$$

При возрастании количества шагов k , $P(k) \rightarrow P(k-1) \rightarrow P = 0,56\sigma_v^2$ установившаяся величина процесса равна 0,56.

Алгоритм вычислений :

- рекурсивная оценка фильтра

$$\hat{x}(k) = a\hat{x}(k-1) + v(k)[y(k) - ac\hat{x}(k-1)]; \quad (19)$$

- весовая функция фильтра

$$v(\kappa) = cP_1(\kappa) [c^2P_1(\kappa) + \sigma_v^2]^{-1}, \quad (20)$$

где

$$P_1(\kappa) = a^2P(\kappa-1) + \sigma_w^2; \quad (21)$$

средняя квадратическая ошибка

$$P(\kappa) = P_1(\kappa) - cv(\kappa)P_1(\kappa). \quad (22)$$

Полученный набор уравнений (19)÷(22) описывает одномерный скалярный фильтр Калмана для модели сигнала (1) и модели измерителя по уравнения (6), [2] и является алгоритмом для оптимального рекурсивного фильтра Калмана.

1.3 Скалярный экстраполятор Калмана

В различных задачах возникает необходимость предсказания – экстраполяции следующего шага. Возможна одношаговая, двухшаговая или m – шаговая экстраполяция, чем дальше в будущее мы можем заглянуть, тем больше будет ошибка экстраполяции [4].

Для одношаговой экстраполяции используем алгоритмы сигнала (1) и измерения с добавлением аддитивного шума (6).

Необходима лучшая линейная оценка величины сигнала $x(\kappa+1)$ в момент $\kappa+1$, который дан информацией и оценкой в предыдущий момент κ . Обозначим оценку одношаговой экстраполяции $x\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)$. “Лучшей” является экстраполяция с минимальной средней квадратической ошибкой

$$P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = E\left[e^2\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)\right] = E\left[x(\kappa+1) - \hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)\right]^2, \quad (23)$$

где $P(\kappa) = E[x(\kappa) - \hat{x}(\kappa)]^2$ - средняя квадратическая ошибка фильтрации; точная оценка фильтрации - $\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)$.

Рекурсивная форма для одношагового экстраполятора описывается как

$$\hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = \alpha(\kappa) \cdot \hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \beta(\kappa) \cdot y(\kappa). \quad (24)$$

Параметры $\alpha(\kappa)$ и $\beta(\kappa)$ выбираются из условия минимизации средней квадратической оценки экстраполяции – уравнение (23).

Ортогональные уравнения имеют вид:

$$E\left[e\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) \cdot \hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)\right] = 0; \quad (25)$$

$$E\left[e\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) \cdot y(\kappa)\right] = 0; \quad (26)$$

$$\alpha(\kappa) = a - e \cdot \beta(\kappa). \quad (27)$$

Соотношение (27) определяется из уравнения (25). Подставив результат (27) в уравнение экстраполяции (24), получим

$$\hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = a\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \beta(\kappa) \cdot \left[y(\kappa) - c\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)\right]. \quad (28)$$

Параметр $\beta(\kappa)$ определяется из уравнений (24) и (27).

В результате
$$P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = \frac{a}{c} \sigma_v^2 \cdot \beta(\kappa) + \sigma_w^2, \quad (29)$$

где
$$\beta(\kappa) = \frac{acP\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)}{c^2P\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \sigma_v^2}. \quad (30)$$

С помощью уравнения (30) определяется $\beta(\kappa)$ из предыдущих средних квадратических оценок экстраполяции для $P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)$.

При этом оптимальный процессор перемножает предыдущую оценку на a и складывает взвешенные исправленные величины, которые содержат точную разность между новой выборкой информации $y(\kappa)$ и предыдущей оценкой экстраполяции $c\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)$, что следует из алгоритма (24).

Считая в уравнении (21) случайную величину $\sigma_w^2 = 0$, получим определение входного сигнала в виде $x(\kappa) = ax(\kappa-1)$, и для оценки $\hat{x}(\kappa)$ в момент κ -экстраполяцию оценки в момент $\kappa+1$ в виде

$$\hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = a\hat{x}(\kappa), \quad (31)$$

при отсутствии другой дополнительной информации. Такая интуитивная форма оценки пригодна только для моделей с шумом $w(\kappa-1)$, который независим от всех предыдущих значений более ранних, чем κ [2].

В соответствии с (31) и (15) получаем уравнения экстраполяции, аналогичное с уравнением (28):

$$a\hat{x}(\kappa) = \hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = a\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + av(\kappa) \left[y(\kappa) - c\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \right], \quad (32)$$

где $\beta(\kappa) = av(\kappa)$ - здесь весовые функции экстраполятора и фильтрации зависят от параметра фильтра a .

Средняя квадратическая ошибка оценки $P(\kappa)$ и ошибки экстраполяции $P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)$ имеют следующую зависимость:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) &= E \left[x(\kappa+1) - \hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) \right]^2 = E \left[ax(\kappa) + w(\kappa) - a\hat{x}(\kappa) \right]^2 = \\ &= E \left\{ a \left[x(\kappa) - \hat{x}(\kappa) \right] + w(\kappa) \right\}^2, \end{aligned}$$

в соответствии с уравнениями (23) и (31).

Так как шум $w(\kappa)$ некоррелирован с величиной ошибки $x(\kappa) - \hat{x}(\kappa)$, то

$$P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = a^2 p + \sigma_w^2. \quad (33)$$

На рис. 3 приведена модель оптимального одношагового рекурсивного экстраполятора Калмана; на рис. 4 – модель одновременной фильтрации и экстраполяции.

Результат вычислений по алгоритму экстраполяции представляется в виде:

- уравнение экстраполяции

$$\hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = a\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \beta(\kappa)\left[y(\kappa) - c\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)\right]; \quad (34)$$

- весовая функция экстраполятора

$$\beta(\kappa) = ap\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \cdot \left[c^2 p\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \sigma_v^2\right]^{-1}; \quad (35)$$

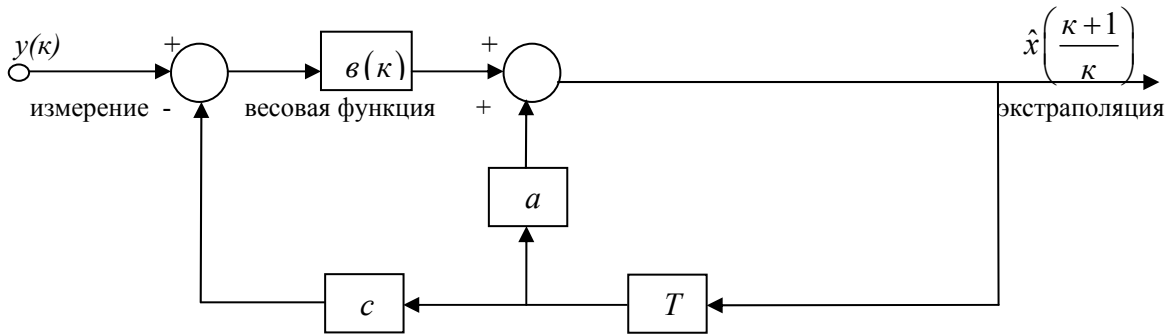


Рис. 3 - Модель экстраполятора Калмана.

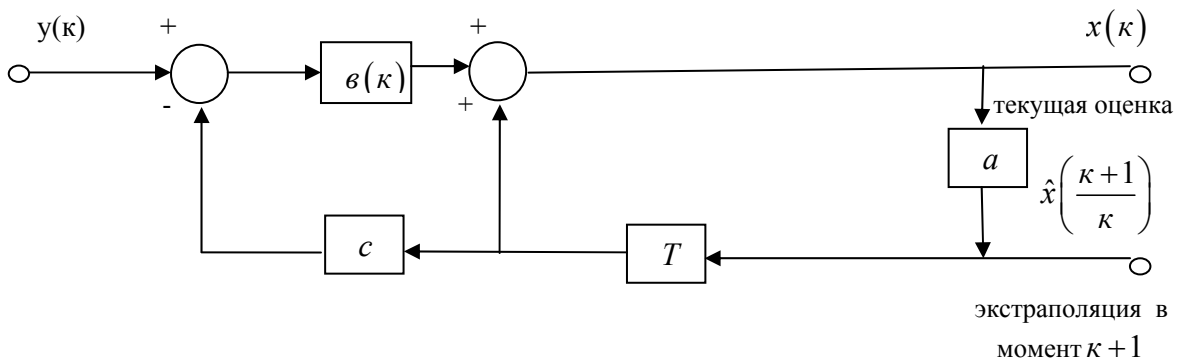


Рис. 4 - Модель одновременной экстраполяции и фильтрации.

– средняя квадратическая ошибка экстраполяции

$$p\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = a^2 p\left(\frac{\kappa}{\kappa+1}\right) - ac\beta(\kappa) p\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right). \quad (36)$$

2 Векторный фильтр Калмана

При оценке сигнала $\bar{x}(\kappa)$ одновременно делается r измерений шума в момент κ . Измеряемые выборки $y_1(\kappa), y_2(\kappa), \dots, y_r(\kappa)$ составляют следующий набор информации:

$$\begin{aligned} y_1(\kappa) &= c_1 x_1(\kappa) + V_1(\kappa); \\ y_2(\kappa) &= c_2 x_2(\kappa) + V_2(\kappa); \\ y_r(\kappa) &= c_r x_r(\kappa) + V_r(\kappa); \end{aligned} \quad (37)$$

где $V_j(k)$ - выборки аддитивного шума; c_1, \dots, c_r - параметры измерителя. Этот набор преобразовывается в векторную форму с r компонентами векторов $\vec{y}(k)$ и $\vec{V}(k)$.

Для q - мерного векторного сигнала $\vec{x}(k)$ информационный вектор $\vec{y}(k)$ определяется как:

$$\vec{y}(k) = C\vec{x}(k) + \vec{V}(k), \quad (38)$$

где $\vec{y}(k)$ и $\vec{V}(k)$ - это $(r \times 1)$ вектор – столбцы; $\vec{x}(k)$ - $(q \times 1)$ вектор – строка; C - $(r \times q)$ - обзорная матрица, представляемая при $r < q$ в виде

$$C = \downarrow \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & C_r & 0 \end{bmatrix}; \quad (39)$$

Соответственно векторное уравнение сигнала имеет вид:

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1) + \vec{w}(k-1), \quad (40)$$

Где $\vec{x}(k), \vec{x}(k-1), \vec{w}(k-1)$ - $(q \times 1)$ вектор столбцы, A - $(q \times q)$ матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & a_q \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Модель векторной формы формирователя измерителя сигнала представлена на рис. 5 а, б.

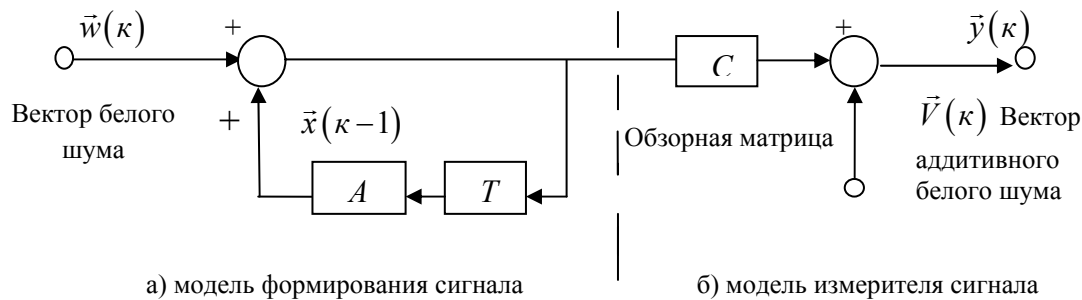


Рис. 5 - Модель векторной формы формирователя измерителя сигнала.

Задача векторной фильтрации Калмана – получить “лучшую” линейную оценку $\hat{x}(k)$ для сигнала $\vec{x}(k)$ и затем сформировать $\hat{x}\left(\frac{k}{k-1}\right)$ - “лучшую” величину экстраполяции. Под “лучшей” понимается оценка, минимизирующая среднюю квадратическую ошибку каждого компонент сигнала одновременно. В операции фильтрации, например, минимизируется каждая средняя квадратическая ошибка

$$E[x_\alpha(k) - \hat{x}_\alpha(k)]^2, \quad (42)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, q$$

Имея решения для скалярных случаев, можно распространить их на векторную систему, используя эквиваленты скаляров и матричные операции [1], приведенные в таблице 1 где знак T означает транспонирование, (-1) - инвертирование матриц.

Таблица 1 – Преобразование скалярных величин в матрицу

Скаляр	Матрица
$a + b$	$A + B$
ab	AB
a^2b	ABA^T
$\frac{1}{a+b}$	$(A+B)^{-1}$

В таблице системный параметр a преобразуется в системную матрицу A ; соответственно параметр измерителя c преобразуется в измерительную матрицу C и так далее, по аналогии. Преобразование выборок измеряемого шума в квадратическую матрицу записывается как:

$$\sigma_v^2 = \sigma_{v1.1}^2 = E[V_1^2(\kappa)] \rightarrow R(\kappa) = E[V(\kappa) \cdot V^T(\kappa)], \quad (43)$$

В соответствии с третьей строкой таблицы 1, при $b=1$. Например, в случае для двух сигналов

$$R(\kappa) = \begin{bmatrix} E[V_1^2(\kappa)] & E[V_1(\kappa) \cdot V_2(\kappa)] \\ E[V_2(\kappa) \cdot V_1(\kappa)] & E[V_2^2(\kappa)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{v1.1}^2 & \sigma_{v1.2}^2 \\ \sigma_{v2.1}^2 & \sigma_{v2.2}^2 \end{bmatrix}.$$

Соответственно, для шума фильтрации:

$$\sigma_w^2(\kappa) = \sigma_{w1.1}^2 = \sigma_{v1.1}^2 E[W_1^2(\kappa)] = Q(\kappa) = E[W(\kappa) \cdot W^T(\kappa)], \quad (44)$$

где $Q(\kappa)$ - ковариантная матрица шума фильтрации, и

$$P(\kappa) = P_{1.1}(\kappa) = E[e_1^2(\kappa)] \rightarrow P(\kappa) = [e(\kappa) \cdot e^T(\kappa)]; \quad (45)$$

-ковариантная матрица ошибок.

Для двух сигналов

$$P(\kappa) = \begin{bmatrix} E[e_1^2(\kappa)] & E[e_1(\kappa) \cdot e_2(\kappa)] \\ E[e_2(\kappa) \cdot e_1(\kappa)] & E[e_2^2(\kappa)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1.1}(\kappa) & P_{1.2}(\kappa) \\ P_{2.1}(\kappa) & P_{2.2}(\kappa) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

В формуле (46) по диагонали находятся значения средних квадратических ошибок, соответствующих уравнению (45).

2.1 Алгоритмы векторного фильтра Калмана

Алгоритм имеет вид:

- оценка рекурсивного векторного фильтра

$$\vec{x}(\kappa) = A\hat{x}(\kappa-1) + K(\kappa)[\vec{y}(\kappa) + CA\hat{x}(\kappa-1)] ; \quad (47)$$

- весовая функция фильтра

$$K(\kappa) = P_1(\kappa)C^T [CP_1(\kappa)C^T + R(\kappa)]^{-2}, \quad (48)$$

где

$$P_1(\kappa) = AP(\kappa-1) \cdot A^T + Q(\kappa-1); \quad (49)$$

- ковариантная матрица ошибок:

$$P(\kappa) = P_1(\kappa) - K(\kappa) \cdot C(\kappa) \cdot P_1(\kappa). \quad (50)$$

Получен алгоритм векторного фильтра Калмана для модели рис. 5, описываемой уравнениями (38) и (40).

Работа фильтра Калмана может быть представлена с помощью вычислительных шагов, (рис. 6).

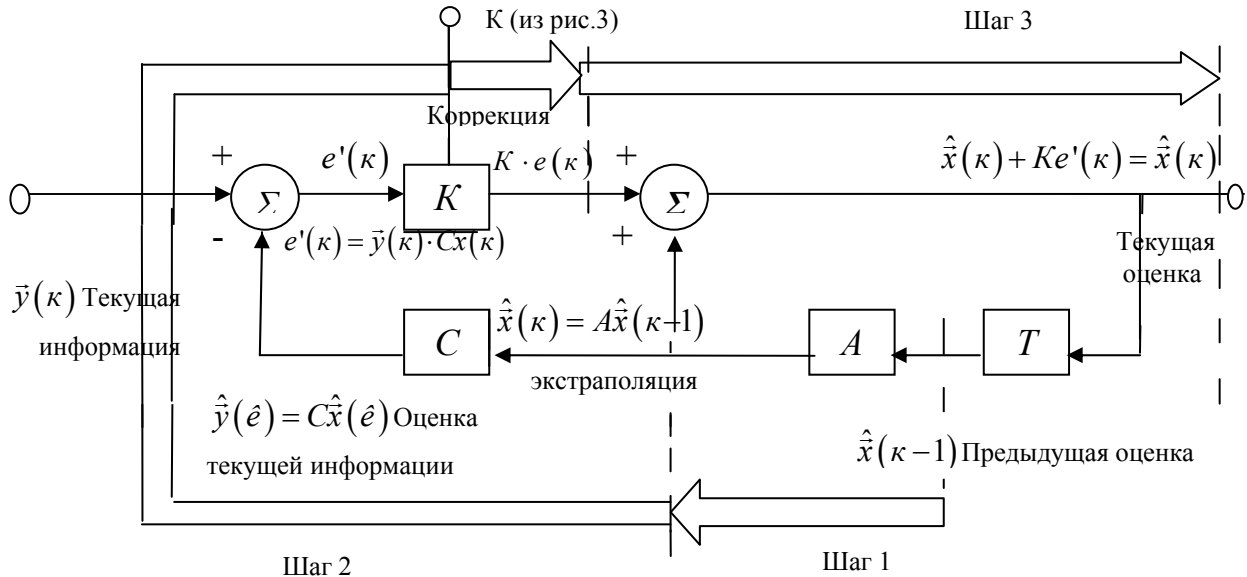


Рис. 6 - Вычислительные шаги в фильтре Калмана.

На рис. 7 представлен процесс вычисления для фильтра Калмана – матрицы весовой функции K и ковариантной матрицы ошибок $P(\kappa)$.

Уравнения (47) – (50) определяют алгоритм для рекурсивного расчета оптимальной матрицы $K(\kappa)$ фильтра. В то же время находятся величины для $P_1(\kappa)$ и $P(\kappa)$, то есть варианты составляющих для экстраполяции и ошибок фильтрации соответственно.

Для расчетов удобно сгруппировать результаты для фильтра Калмана, уравнения (47) – (50), на две части:

- экстраполяция:

$$\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) = A\hat{x}(\kappa-1 \cdot \kappa-1);$$

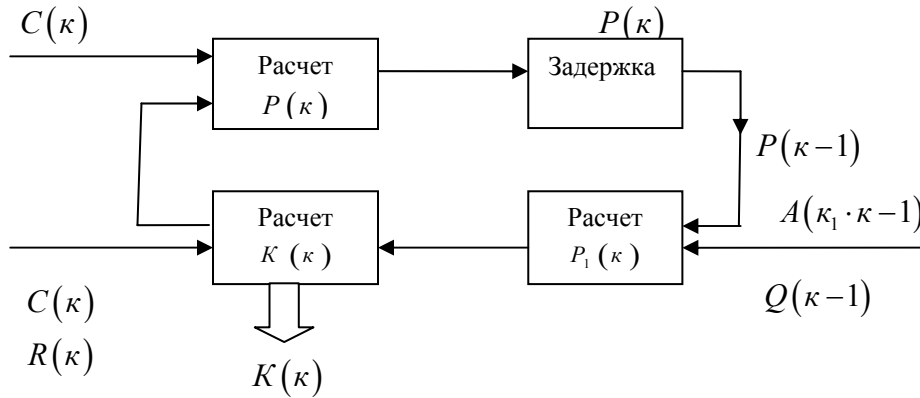
$$P(\kappa)\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) = AP\left(\frac{\kappa-1}{\kappa-1}\right)A^T + Q(\kappa-1);$$

- коррекция:

$$P\left(\frac{\kappa}{\kappa}\right) = P\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) - KCP\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right);$$

$$K = P\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \cdot C^T\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \left[CP\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)C^T + R(\kappa) \right]^{-1}.$$

Основа первой части – уравнение состояний (37). Основа второй части – уравнение измерений (40). Обе части показаны на рис. 7



(на фильтр Калмана)

Рис. 7 - Процесс вычислений для фильтра Калмана.

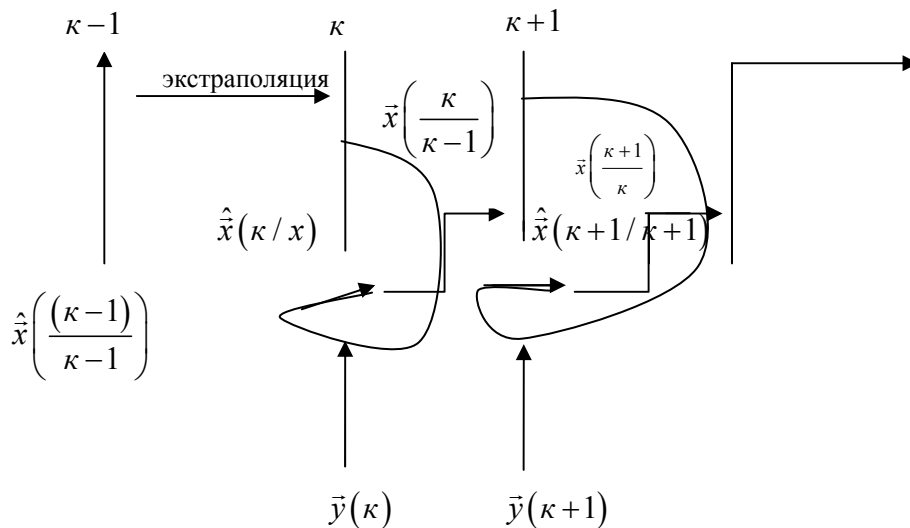


Рис. 8 - Две стадии расчетного цикла векторного фильтра Калмана.

2. 2 Алгоритмы векторного экстраполятора Калмана

Результат вычислений по алгоритму векторного экстраполятора:

- уравнение экстраполятора

$$\hat{x}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = A\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + G(\kappa)\left[y(\kappa) - C\hat{x}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)\right]; \quad (51)$$

- весовая функция экстраполятора

$$G(\kappa) = AP\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \cdot C^T \left[CP\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \cdot C^T + R(\kappa) \right]^{-1}; \quad (52)$$

- средняя квадратическая оценка экстраполятора

$$P\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = [A - G(\kappa) \cdot C] \cdot P\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \cdot A^T + Q(\kappa). \quad (53)$$

Модель цього екстраполятора описана уравнениями (2) и (4).
 Экстраполированный векторный сигнал имеет вид:

$$\hat{\bar{x}}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) = A\hat{x}(\kappa), \quad (54)$$

т.е. величина $\hat{\bar{x}}(\kappa)$ - это лучшая оценка экстраполяции одного шага, без шума, где в оценке работает динамическая матрица A .

Ковариантная матрица ошибок экстраполяции уравнения (53) получается после подстановки уравнения (49) в (4) и представлением $P_1(\kappa)$ как $P\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)$.

Уравнения (54) дает простую связь между фильтрацией и экстраполяцией, как показано на рис. 9.

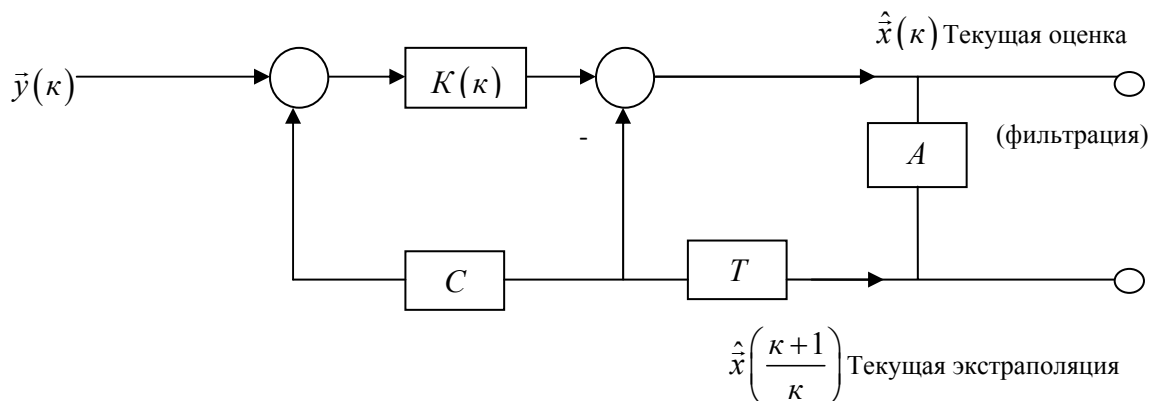


Рис. 9 – Одновременная фильтрация и экстраполяция векторного сигнала.

Заключение. В результате проведенных исследований получены алгоритмы скалярного и векторного экстраполяторов Калмана. Получены модели одновременной фильтрации и экстраполятора скалярных и векторных сигналов.

Список литературы

1. Sage A.P. and Melsa J.L. Estimation theory with application in communications and control. – McGraw-Hill, 1991. - 450p.
2. Schwartz Mand L. Signal processing. Discrete spectral analysis detection and estimation. – McGraw-Hill, 1975.- 350p.
3. Scovell G.A. A guided tour through the implementations of a Kalman filter. Univ of Birmingham (England), Bosworth Course, April 1977.
4. Sorenson H.W. Kalman filtering techniques. Advances in control systems. – Leondes (editor) Academic Press, 1996. – 570p.

Екстраполяція дискретних сигналів з використанням фільтрів Калмана. Лімонов О.С., Пустовіт Т.М., Лімонов О.О.

В статті досліджується можливість екстраполяції дискретних сигналів з використанням фільтрів Калмана.

Ключові слова: екстраполяція, скалярний фільтр Калмана, векторний фільтр Калмана, оцінка, оптимальний.

Prediction of sampled signals with using scalar and vector Kalman filters. Limonov A. S., Pustovit T.M.

Limonov A. A.

The abilities of sampled signals prediction with using scalar and vector Kalman filters are researched.

Keywords: prediction, scalar Kalman filters, vector Kalman filter, estimation, optimal.