

УДК 621.317.08

А.С. Лимонов, к.т.н., Б.В. Перельгин, к.т.н., А.А. Лимонов\*, инж.

Одесский государственный экологический университет

\*Московский инженерный физический институт

## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

*В статье исследуется возможность использования дискретного вейвлет-анализа в цифровой обработке сигналов.*

*Ключевые слова:* вейвлет-анализ, вейвлет-преобразование, обратное вейвлет-преобразование.

**Введение.** Теория вейвлетов является мощным дополнением Фурье-анализу и обеспечивают более гибкую технику обработки сигналов [1,2]. Недостаточно рассмотренными являются вопросы, связанные с дискретным вейвлет-анализом [1, 2, 3, 4, 5].

**Материалы и методы исследования.** В статье рассматривается процесс усреднения и детализации с помощью матричных преобразований, обратимость вейвлет-преобразования.

**Цель данной статьи** – исследование возможностей дискретного вейвлет-анализа для цифровой обработки сигналов.

**Изложение основного материала статьи.** Термин «вейвлет» (wavelet) означает «всплеск» или «маленькая волна». Функции с графиком всплеска стали все чаще применяться для разложения сигналов вместо гармонических волн. Теория вейвлетов является мощным дополнением Фурье-анализу и обеспечивает более гибкую технику обработки сигналов. Главное преимущество вейвлет-анализа заключается в его возможности обнаружить сильно локализованные изменения сигналов, тогда как дискретное преобразование Фурье (ДПФ) этого не дает, потому что в коэффициентах ДПФ отражается поведение сигнала на всем временном отрезке его наблюдения. Особенно важна принципиальная возможность вейвлетов представлять нестационарные сигналы, состоящие из различных компонентов, действующих на непересекающихся временных интервалах, модулированные сигналы и так далее.

Подобные сигналы являются более адекватными моделями процессов, происходящих в каналах связи и устройствах цифровой обработки сигналов.

Вейвлет-спектрограммы существенно информативнее обычных спектрограмм, что делает их незаменимыми при «тонком» анализе структуры сигналов в различных прикладных задачах, например при идентификации параметров цифровых систем или в биомедицинской кибернетике [2, 3, 4, 5].

### *Усреднение и детализация*

Рассмотрим  $N$ -точечную последовательность отсчетов цифрового сигнала. Пусть число  $N$  является степенью двойки. В этом нет ограничения общности, так как в конце последовательности всегда можно добавить нулевые отсчеты, увеличивающие  $N$  до ближайшей степени двойки. В качестве примера возьмем 8-точечную последовательность

$$\{16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2\}.$$

Сначала для каждой пары рядом стоящих отсчетов вычислим четыре средние

величины:

$$(16+14)/2 = 15; \quad (8+6)/2 = 7; \quad (12+10)/2 = 11; \quad (4+2)/2 = 3.$$

Вполне очевидно, что знания этих четырех полусумм недостаточно для обратного восстановления всего сигнала. Поэтому можно подобным образом вычислить четыре полуразности

$$(16-14)/2 = 1; \quad (8-6)/2 = 1; \quad (12-10)/2 = 1; \quad (4-2)/2 = 1,$$

которые называют коэффициентами деталей (детальями). Средние величины представляют крупномасштабный «слепок» исходного сигнала, а детали необходимы для восстановления его «тонкой» структуры. В случае сильной коррелированности отсчетов сигнала вполне достаточно крупномасштабного анализа, т.к. детали будут малы.

Полученную последовательность, состоящую из четырех полусумм и четырех полуразностей

$$\{15, 11, 7, 3, 1, 1, 1, 1\},$$

легко использовать для восстановления отсчетов исходного сигнала. Повторим описанную процедуру применительно к четырем первым (крупным) элементам новой последовательности:

$$(15+11)/2 = 13; \quad (7+3)/2 = 5; \quad (15-11)/2 = 2; \quad (7-3)/2 = 2.$$

Они преобразовались в два средних и две полуразности. Остальные элементы оставим без изменения. Получилась последовательность следующего вида:

$$\{13, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}.$$

Последняя итерация описываемого процесса преобразует первые два элемента в одно среднее и одну полуразность:

$$(13+5)/2 = 9; \quad (13-5)/2 = 4.$$

Можно отметить, что последняя сумма является средним значением всех восьми отсчетов исходного цифрового сигнала. В итоге получилась преобразованная 8-точечная последовательность

$$\{9, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1\},$$

которая является альтернативным представлением исходного сигнала и состоит из общего среднего и семи полуразностей, выражающих различные уровни детализации. Рассмотренная процедура представляет собой *вейвлет-преобразование*, а результирующая последовательность является вейвлет-образом исходного сигнала.

Оценим порядок вычислительной сложности алгоритма вейвлет-преобразования, т.е. число арифметических операций сложения, вычитания и деления как функцию количества отсчетов  $N$  в сигнале. В проведенных ранее вычислениях требуется выполнить  $8+4+2=14$  операций, которые можно представить в виде произведения:  $14 = 2(8-1)$ . Если в общем случае имеется  $N = 2^V$  отсчетов сигнала, то на первом шаге потребуется  $2^V$  операций, на втором –  $2^{V-1}$  операций и так далее до последнего шага, на котором будет  $2^1$  операции. Общее число операций находится простым суммированием членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{i=1}^V 2^i = 2(2^V - 1)/(2 - 1) = 2(N - 1).$$

Таким образом, для реализации вейвлет-преобразования требуется произвести  $2(N-1)$  арифметических операций, т.е. сложность алгоритма имеет порядок  $O(N)$ .

На каждом из трех шагов описанного процесса исходный сигнал рассматривается с различной степенью детализации. Поэтому удобно с каждой

итерацией процесса связать величину, называемую *разрешением*, которая равна числу оставшихся средних в конце данного шага. В проведенном анализе разрешение последовательно принимало значения  $4 = 2^{\nu-1}$ ,  $2 = 2^{\nu-2}$ ,  $1 = 2^{\nu-3}$  для  $\nu = 3$ . Понятие разрешения является принципиально важным в дискретном вейвлет-анализе.

### Матричные представления

Описанный в предыдущем разделе процесс усреднения и детализации нетрудно представить с помощью матричных преобразований. Для простоты изложения примем  $N = 2^2 = 4$  и введем следующие обозначения. Исходную 4-точечную последовательность отсчетов цифрового сигнала представим в виде вектора-столбца:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix}.$$

Тогда на первом этапе преобразование, состоящее из вычисления двух полусумм и двух полуразностей, можно записать в матричной форме

$$\mathbf{H}_2 \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}.$$

Верхние две строки матрицы  $\mathbf{H}_2$  усредняют два соседних отсчета сигнала, а нижние две – детализируют их. Если каждую строку (или каждый столбец) матрицы  $\mathbf{H}_2$  считать четырехмерным вектором, то можно заметить, что скалярное произведение любой пары векторов, как сумма произведений соответствующих компонентов, равно нулю, т.е. они образуют ортогональную систему. Норма (длина) каждого вектора равна  $1/\sqrt{2}$ . Для удобства преобразований приведем нормы векторов к единице, умножив все компоненты на  $\sqrt{2}$ . В этом случае получим *ортогональную матрицу*.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

При усреднении и детализации с помощью такой матрицы будет происходить деление не на 2, а на  $\sqrt{2}$ , что не умаляет общности результатов.

На втором (и последнем) этапе необходимо сохранить полуразности и преобразовать две полусуммы. Исходя из аналогичных рассуждений, можно утверждать, что этой процедуре соответствует матрица

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы усредняет отсчеты, вторая – детализирует, третья и четвертая, образуя единичную (тождественную) матрицу, сохраняют предыдущие полуразности. Произведение матриц  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  дает искомое дискретное вейвлет-преобразование вектора  $\bar{x}$ , т.к. матрица  $\mathbf{H}$  задает отображение  $R^4 \rightarrow R^4$  [6]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Нетрудно заметить, что матрица  $\mathbf{H}$  также является ортогональной. Выражение (1) представляет собой известное преобразование Хаара, которое в свете введенных определений является вейвлет-преобразованием

$$\mathbf{H}\bar{x} = \bar{w}, \quad (2)$$

где элементы вектора-столбца  $\bar{w}$  называют коэффициентами.

Если с каждой строкой преобразования Хаара соотнести ступенчатую функцию, заданную на единичном интервале, то первые четыре из них в соответствии с (1) будут иметь вид, представленный на рис. 1

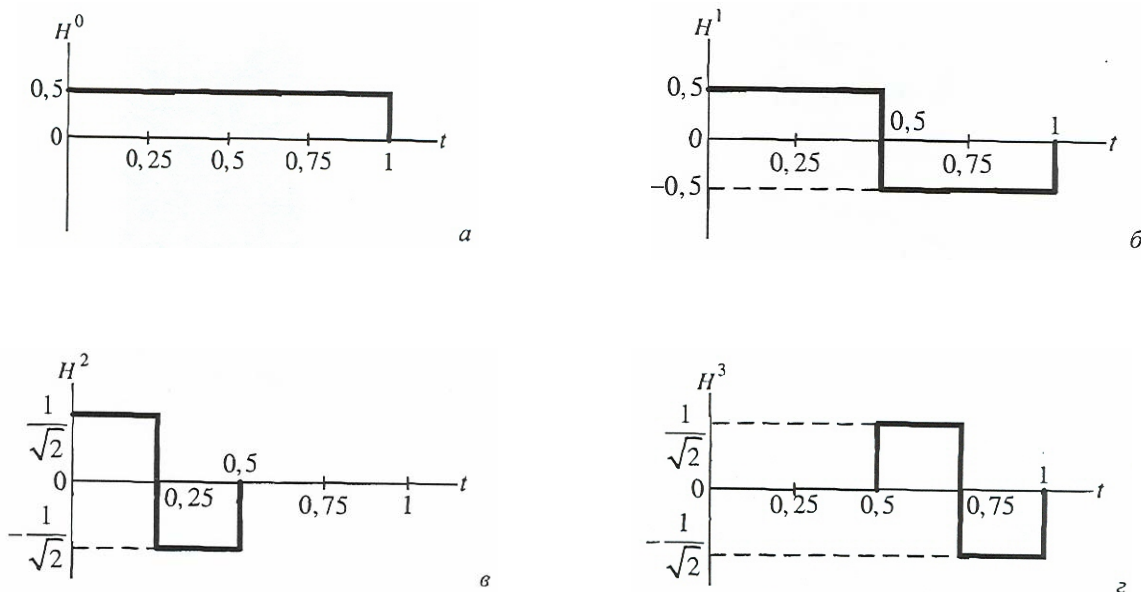


Рис.1 – Ступенчатые функции Хаара.

В базисе этих функций возможно разложение непрерывного во времени сигнала, заданного также на единичном интервале. При увеличении порядка матрицы  $\mathbf{N}$  будет происходить сжатие функций во времени (масштабирование), а сами они станут напоминать короткие всплески, перемещаемые по оси абсцисс. Подобный процесс составляет сущность непрерывного вейвлет-анализа, основанного на масштабировании и сдвигах. Ограниченные по длительности и перемещаемые во времени вейвлеты (функции  $H^2$  и  $H^3$ ) в результате свертки с отрезками сигнала позволяют выявить их локальные особенности, чего не предполагают другие методы анализа. Дискретным аналогом описанного процесса является воздействие матрицы (1) на вектор отсчетов входного сигнала  $\bar{x}$ . Качественная картина анализа «тонкой» структуры сигнала при этом сохраняется.

Обобщим матричный алгоритм усреднения и детализации на произвольную  $N$ -точечную последовательность, когда  $N = 2^V$ , при поэтапном процессе преобразования, описанном вначале. На первом шаге ортогональная матрица преобразования имеет вид:

$$\mathbf{H}^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица – квадратная порядка  $N = 2^V$ . Определим две новые матрицы, входящие в состав  $\mathbf{H}_H$ .

$$\mathbf{A}_H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

и

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

что позволяет считать  $\mathbf{H}_n$  блочной матрицей, состоящей из двух подматриц  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{D}_n$ , размером  $2^{v-1} \times 2^v$  каждая, т.е. записать  $\mathbf{H}_n$  в виде

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{D}_n \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Подматрицу  $\mathbf{A}_n$  можно назвать преобразованием усреднения, а  $\mathbf{D}_n$  – преобразованием детализации. Введем векторы-столбцы результатов поэтапного преобразования

$$\bar{\mathbf{a}}_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{v-1}^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{v-1}^{2^{v-1}-1} \end{bmatrix} \text{ и } \bar{\mathbf{d}}_{n-1} = \begin{bmatrix} d_{v-1}^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{v-1}^{2^{v-1}-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

которые содержат  $2^{v-1}$  элементов и соответственно являются векторами коэффициентов усреднения и детализации. С учетом принятых обозначений преобразование (2) на первом этапе имеет вид:

$$\mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{n-1} \\ \bar{\mathbf{d}}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Матрица в правой части (8) является также блочной и состоит из двух векторов-столбцов (7).

На каждом шаге вейвлет-преобразования сохраняются детализирующие коэффициенты  $d$  и обрабатываются результаты усреднения  $a$ . Очередной шаг вейвлет-преобразования состоит в применении к вектору  $\bar{\mathbf{a}}_{n-1}$  операций усреднения и детализации на следующем, более низком, уровне разрешения:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ \mathbf{D}_{n-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{n-2} \\ \bar{\mathbf{d}}_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{A}_{n-1}$  и  $\mathbf{D}_{n-1}$  – матрица вида (4) и (5) размером  $2^{v-2} \times 2^{v-1}$ , а  $\bar{\mathbf{a}}_{n-2}$  и  $\bar{\mathbf{d}}_{n-2}$  – векторы-столбцы, содержащие  $2^{v-2}$  элементов. Чтобы построить часть вейвлет-преобразования, вектор  $\bar{\mathbf{d}}_{n-2}$  сохраняется вместе с  $\bar{\mathbf{d}}_{n-1}$ . Этот процесс продолжается до заключительного шага, на котором получаются скалярные величины  $a_0$  и  $d_0$ . Итоговый результат вейвлет-преобразования можно представить вектором-столбцом, содержащим  $N = 2^v$  элементов:

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ d_0 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{d}_{v-1} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

**Обратное вейвлет-преобразование**

В практических приложениях выдвигается традиционное требование обратимости вейвлет-преобразования, как и любого другого преобразования. То есть по изображению (вектору)  $\bar{\mathbf{w}}$  необходимо восстановить оригинал ( $N$ -точечную последовательность  $\bar{\mathbf{x}}$ ). Исходя из выражения (2), входной вектор отсчетов может быть получен в результате умножения слева обеих частей этого равенства на обратную матрицу  $\mathbf{Z}^{-1}$ :

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\bar{\mathbf{w}},$$

откуда

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\bar{\mathbf{w}}, \quad (11)$$

т.к. произведение  $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}$  образует единичную матрицу  $\mathbf{I}$ , являющуюся тождественным преобразованием. Следствием ортогональности матрицы  $\mathbf{H}$  является простота ее обращения, заключающаяся в обычном транспонировании. Поэтому выражение (11) для обратного вейвлет-преобразования принимает вид:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T\bar{\mathbf{w}}. \quad (12)$$

Если рассматривать многошаговый процесс, то можно убедиться в использовании на каждой итерации ортогональной матрицы Хаара  $\mathbf{H}_k$  соответствующего порядка ( $k = 1, 2, \dots, v$ ). Поэтому восстановление векторов коэффициентов усреднения  $\bar{a}_k$  на  $k$ -том этапе будет происходить аналогично (11) на основании обращения матрицы в выражении (9):

$$\bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{H}_k^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{k-1} \\ \bar{\mathbf{d}}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{k-1} \\ \bar{\mathbf{d}}_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

С учетом того, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^T & | & \mathbf{D}_k^T \end{bmatrix},$$

выражение (13) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{a}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^T & | & \mathbf{D}_k^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{k-1} \\ \bar{\mathbf{d}}_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k^T \bar{\mathbf{a}}_{k-1} + \mathbf{D}_k^T \bar{\mathbf{d}}_{k-1}. \quad (14)$$

Соотношение (14) дает практическую формулу для восстановления  $\bar{\mathbf{a}}_k$  из  $\bar{\mathbf{a}}_{k-1}$  и  $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ . В скалярном случае (14) приводит к паре равенств

$$a_k^0 = \frac{a_{k-1}^0 + d_{k-1}^0}{\sqrt{2}}; \quad (15)$$

$$a_k^1 = \frac{a_{k-1}^0 - d_{k-1}^0}{\sqrt{2}}.$$

Распишем равенство (9) для произвольного  $k$ -го этапа в виде пары матричных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{a}}_k &= \bar{\mathbf{a}}_{k-1}; \\ \mathbf{D}_k \bar{\mathbf{a}}_k &= \bar{\mathbf{d}}_{k-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив (16) в (14), получим равенство

$$\bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{a}}_k + \mathbf{D}_k^T \mathbf{D}_k \bar{\mathbf{a}}_k, \quad (17)$$

из которого следует, что

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + \mathbf{D}_k^T \mathbf{D}_k = \mathbf{I}_k, \quad (18)$$

где  $\mathbf{I}_k$  – единичная матрица порядка  $2^k$ . Следовательно, выполняется пара соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T &= \mathbf{I}_{k-1}; \\ \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^T &= \mathbf{I}_{k-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

**Заключение.** Равенство (19) отражает возможность проведения прямого и обратного вейвлет-преобразования, реализуемого с помощью пары фурье-фильтров (низкочастотного и высокочастотного), имеющих одинаковую частоту среза.

### Список литературы

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов – М.: Мир, 1989. – 576 с.
2. Вайдънатхан П.П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией. Методологический обзор// ТИИЭР, т.29, №9, 1990.
3. Воеводин В. В. Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления – М.: Мир. Гл. ред. Физ.-мат. литературы, 1984. – 318 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
5. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд. 2-е, пререраб. и доп. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 400 с.

**Вейвлет-аналіз у цифровій обробці сигналів.** Лимонов О.С., Перелигін Б.В., Лимонов О.О.

*В статті досліджується можливість використання дискретного вейвлет-аналізу у цифровій обробці сигналів.*

**Ключові слова:** вейвлет-аналіз, вейвлет-перетворення, зворотне вейвлет-перетворення.

**Wavelet analysis in digital signal processing.** Limonov A.S., Perelygin B.V., Limonov A.A.

*The article researches the abilities of using discrete wavelet analysis in digital signal processing.*

**Keywords:** wavelet analysis, direct wavelet transform, inverse wavelet transform.