

О.Н.Грушевский, к.геогр.н.

Одесский государственный экологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ЛАНЦОША С ПЕРЕМЕННЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ОКНОМ ДЛЯ ТРАНСФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Проведение тестовых фильтраций одно- и двумерных массивов зональной составляющей скорости ветра позволило исследовать влияние характеристик спектрального окна фильтра Ланцоша на параметры низко- и высокочастотных составляющих рассматриваемых пространственно-временных рядов.

Ключевые слова: фильтрация пространственных и временных рядов, эффект Гиббса, сигма-фактор Ланцоша, весовая функция, частота Найквиста, частота отсечения.

Постановка проблемы. Количественное описание любого атмосферного явления можно представить в виде совокупности более простых гармоник (ряда или интеграла Фурье) разных частот, если речь идет о временном периоде, или разных длин волн, если движение рассматривается в пространстве. Для выделения нужных гармоник применяют аппарат фильтрации, основной смысл которого состоит в изменении амплитуд гармоник Фурье, которое производится путем модификации последовательности данных с применением комплекта весов, составляющих весовую функцию.

Общедоступными для применения [1] сейчас являются (например, в Matlab функции пакета Signal Processing) не- и рекурсивные дискретные фильтры, аналоговые фильтры, а также фильтры с весовыми функциями (окна Ханна, Хэмминга, Натолла, Барлетта-Ханна, Блэкмена-Харриса, Тьюки и др.).

В метеорологии получили распространение математические фильтры (высоко- и низкочастотные фильтры Ханна и Хемминга, полосной фильтр Крадкока и др.) [2, 3], которые наряду со своими преимуществами, с точки зрения задачи о взаимодействиях, имеют недостаток, который заключается в существенном вкладе переносной частоты в амплитуду колебаний Гиббса (паразитарные колебания, возникающие из-за конечной длины ряда). Поэтому процедура фильтрации должна максимально подавлять боковые полосы, не уменьшая существенно при этом крутизну характеристики и в то же время отличаться простотой.

Другая особенность фильтрации состоит в том, что исходные характеристики фильтра должны определенным образом отражать физическую сущность решаемой задачи. При фильтрации временных рядов определение граничной частоты должно учитывать выбор характерного временного масштаба явления, который в свою очередь должен иметь ясную физическую трактовку (например, для процессов синоптического масштаба в области граничной частоты $1/10$ происходит изменение обратной связи вихревых структур и зонального потока) [4]. При фильтрации пространственных рядов преобразование параметров фильтра проводится таким образом, чтобы граничная частота содержала ту характеристику длин волн, значение которой свойственно для данного процесса (для вихрей синоптического масштаба значение граничной частоты вдоль круга широты составит $5/360$). В этом случае выбор значения зонального волнового числа равного 5 отсекает влияние длинных волн и оставляет ненарушенным диапазон волновых чисел 8-20, где происходит передача энергии движений от меньших масштабов к большим (или наоборот).

Простота и универсальность фильтра определяются неизменностью (или минимальной изменчивостью) его характеристик при смене временных рядов на пространственные. Разумеется, что изменение частоты Найквиста на её аналог другой размерности (соответственно, сутки^{-1} на $\text{градус широты}^{-1}$) задачу несколько не усложняет.

Последним моментом, определяющим качество фильтрации исходных данных, является крутизна характеристики фильтра. Наиболее простым решением проблемы представляется использование максимально длинных временных рядов, что, впрочем, не всегда доступно. Поэтому выбор количества весов должен быть определенным образом соотносён с длиной ряда. Выделение низкочастотной составляющей процесса, которую можно отождествить с неким

«равновесным» состоянием атмосферы, как будет показано далее, существенно зависит от выбранного количества весов, что вносит в процесс фильтрации некую долю субъективизма.

Таким образом, *цель* статьи можно сформулировать как проведение тестовых фильтраций одно- и двумерных массивов данных для определения влияния характеристик переменного спектрального окна фильтра Ланцоша на параметры низко- и высокочастотных составляющих пространственно-временных рядов.

Краткие теоретические сведения. Фильтр Ланцоша в последние два десятилетия нашел широкое применение при обработке акустических, радиотелефонных, телевизионных, видео и т.д. сигналов, паттернов [5]. Фактически он является, в известном смысле, идеальным фильтром (применяется нормированная функция «кардинальный синус» $\text{sinc}(t)$), который подавляет все частоты в спектре сигнала выше некоторой частоты среза, оставляя заданную низкочастотную полосу сигнала. В частотной области он представляет собой прямоугольную функцию, во временной области – функцию кардинального синуса. В действительности, реальные фильтры по своим характеристикам могут лишь приближаться к sinc -фильтру, поскольку идеальный sinc -фильтр физически нереализуем в силу бесконечного порядка передаточной функции и бесконечности ядра по времени в обе стороны. Естественно, это накладывает ограничения на его реализацию как во временной области, так и в частотной.

Его стандартное определение:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}.$$

Непрерывное преобразование Фурье нормированной функции $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ (для единичного интервала частот) равно прямоугольной функции $\text{rect}(f)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) e^{-2\pi i f t} dt = \text{rect}(f),$$

где прямоугольная функция – функция, принимающая значения, равные 1 для любого аргумента из интервала между $-1/2$ и $1/2$, и равная нулю при любом другом значении аргумента.

Конечные последовательности ограничивают возможное число весов, что приводит к паразитарным колебаниям в вычисленной функции отклика. В обрезанном ряде Фурье ошибка имеет форму «модулированной переносной волны». К. Ланцош установил [6, 7], что её частота равна частоте первого отброшенного, либо последнего удержанного члена, а амплитуда вносит существенный вклад в амплитуду колебаний Гиббса. Он доказал, что сглаживая частичную сумму путем интегрирования (усреднения) по этому периоду, можно устранить любые эффекты пульсации. Не вдаваясь в подробные выкладки доказательства, которые доступны в [7], заметим, что сглаженный ряд Фурье есть исходный ряд Фурье с коэффициентами, умноженными на соответствующие сигма-факторы

$$h_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \sigma(n, k) [a_k \cos kt + b_k \sin kt],$$

где $\sigma(n, k) = \frac{\sin 2\pi k f_N \Delta / n}{2\pi k f_N \Delta / n}$, $k = -n, \dots, 0, \dots, n$ – сигма факторы;

Δ – интервал дискретности; n – количество весов; f_N – частота Найквиста (или её аналог).

Таким образом, дискретное преобразование Фурье, используемое во всех непараметрических методах спектрального оценивания, подразумевает периодическое продолжение анализируемого фрагмента сигнала. Скачки, возникающие на стыках фрагментов и приводящие к появлению боковых лепестков значительного уровня в спектральной области ослабляются умножением (перед выполнением дискретного преобразования Фурье) сигнала на

спадающую от центра к краям весовую функцию (окно). В результате величина скачков на стыках сегментов уменьшается, меньше становится и уровень нежелательных боковых лепестков спектра – платой за это является некоторое расширение спектральных пиков.

Далее представим весовую функцию для низкочастотного фильтра Ланцоша [8]

$$w_k = \frac{\sin 2\pi f_c k \Delta}{2\pi f_N k \Delta}, \quad (1)$$

умножение которой на сигма-фактор Ланцоша даст её окончательный вид

$$\bar{w}_k = \frac{\sin 2\pi f_c k \Delta}{2\pi f_N k \Delta} \sigma, \quad (2)$$

где f_c – граничная частота интервала.

Материалы исследования. В качестве исходных данных для проведения тестовых фильтраций использовались данные ре-анализа NCEP-NSCAR полей зональной составляющей скорости ветра пространственным разрешением $2,5^\circ \times 2,5^\circ$ на изобарической поверхности 500 гПа. Для решения нашей задачи сформируем два ряда – пространственный и временной, которые и подвергнем процедуре математической фильтрации. Рассматриваемый временной промежуток (01.05.2010 – 01.09.2010 г.) относится к периоду формирования над территорией Восточной Европы аномального температурного режима (2010 г. стал самым «теплым» за всю историю наблюдений с 1891 г., а по данным метеобюро Москвы за летний период было установлено 13 различных рекордов жары), обусловленного влиянием длительно существующего блокирующего антициклона над центральной частью России.

Пространственный ряд зональной составляющей скорости ветра сформирован вдоль круга широты 55° с.ш., т.е. он состоит из 144 значений. Выбор широты объясняется нахождением в её области центра антициклона 06.08.2010 г.

На рис. 1 представлен пример работы фильтра Ланцоша на указанном ряде, исходные характеристики которого отображены в подрисуночной подписи.

На рис. 1а представлены весовые функции высоко- и низкочастотных составляющих ряда, а также вид сигма-фактора Ланцоша (окна). Весовые функции образуют переменное спектральное окно и позволяют увеличить подавление сигнала в полосе задерживания фильтра за счет некоторого расширения полосы пропускания. При фильтрации пространственного ряда, после применения 20-точечного фильтра получаем на выходе 124 значения (рис. 1б).

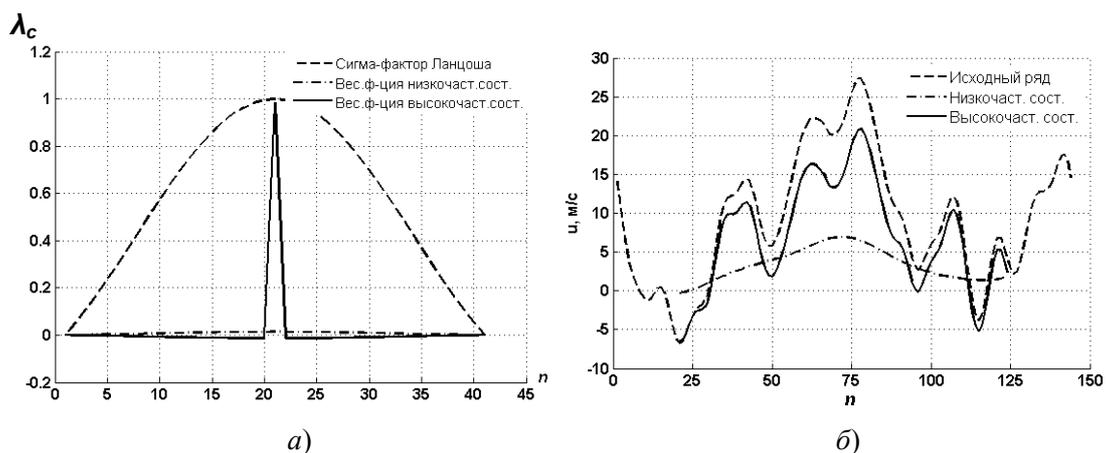


Рис. 1 – Фильтрация кругового ряда при $m = 5$; $\lambda_c = 5/360$; $\Delta = 2,5^\circ$; $n = 20$.

Из рис. 1б видно, что исходный ряд разложен на две составляющие – высоко- и низкочастотную, но визуально заметно сильное сглаживание, т.к. локальные пики на низкочастотной составляющей не прослеживаются. Изменим характеристики переменного

спектрального окна, а именно увеличим значение зонального волнового числа (характерный масштаб явления) до 10, что не противоречит физической сущности процесса.

Неизменность других характеристик фильтра наглядно представлена на рис. 2б, где спектральное окно в точности соответствует первой фильтрации. Не претерпевают сколь-либо существенных изменений высоко- и низкочастотные составляющие ряда (рис. 2а).

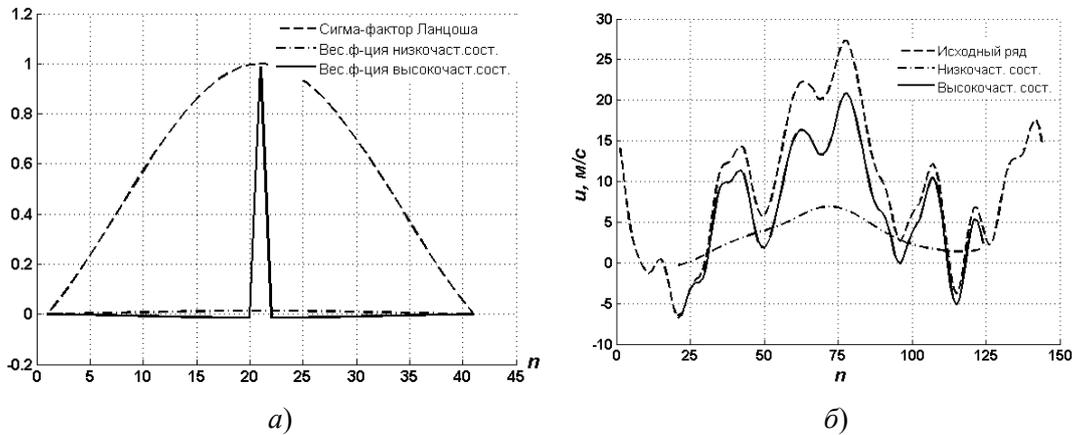


Рис. 2 – Фильтрация кругового ряда при $m = 10$; $\lambda_c = 10/360$; $\Delta = 2,5^\circ$; $n = 20$.

Изменим характеристики окна, уменьшив количество весов до 15. Это, в целом, снижает качество фильтрации, из-за уменьшения крутизны характеристики (функции отклика) фильтра, но целесообразность такого шага объясняется, во-первых, длиной ряда, а во-вторых, как следствие, чрезмерным сглаживанием, на что указывалось выше.

На рис. 3а представлены характеристики измененного спектрального окна (длина фильтрованного ряда при $n = 15$ составляет 130 значений), а из рис. 3б видно, что кривая низкочастотной составляющей зональной скорости ветра уже содержит локальные пики. Это подразумевает «перетягивание» некоей части энергии процесса в сторону высоких частот, что вполне объяснимо из анализа (1)-(2). Таким образом, задача исследователя, помимо определения величин m и λ_c , подразумевает выбор оптимального количества весов, поскольку при фильтрации двумерных массивов поля величины u' , являющейся разностью между исходным рядом и его низкочастотной составляющей, могут содержать ошибки, влияющие на дальнейший расчет.

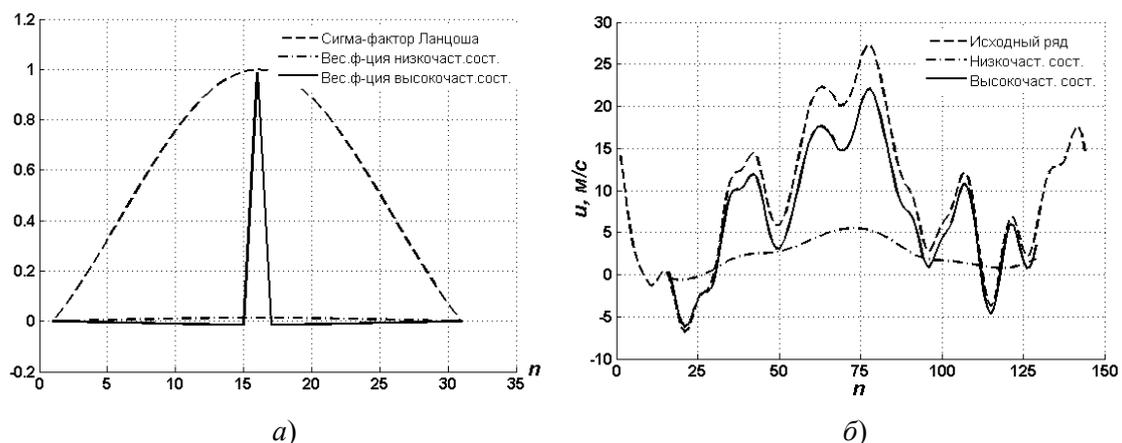


Рис. 3 – Фильтрация кругового ряда при $m = 10$; $\lambda_c = 10/360$; $\Delta = 2,5^\circ$; $n = 15$.

Не представляет трудностей дальнейшая фильтрация двумерного массива зональной составляющей скорости ветра. Реализация такого алгоритма достигается формированием цикла в программе фильтрации, который позволяет переходить от одной широте к другой. При этом осреднение осуществляется строго вдоль круга широты, хотя несомненный интерес

представляет апробация варианта расчета с осреднением, реализованным, например, с обходом вокруг точки. Пример фильтрации двумерного пространственного массива зональной составляющей скорости ветра (выделена высокочастотная составляющая) показан на рис. 4.

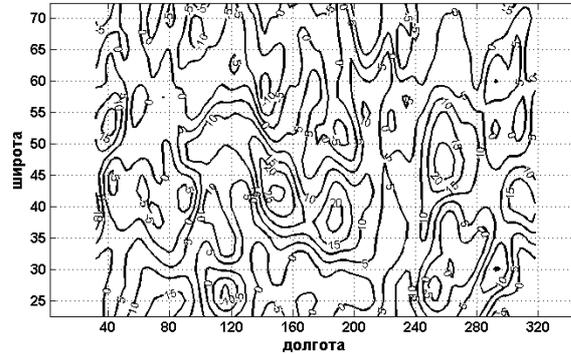


Рис. 4 – Отфильтрованное поле высокочастотной зональной составляющей скорости ветра u' (характеристики спектрального окна совпадают с рис. 3).

И хотя преимущественно выполняют фильтрацию именно рядов, подобная трансформация данных может быть полезной при исследовании эволюции барических образований, поскольку учет влияния низкочастотных составляющих атмосферных процессов на погодообразующие факторы в традиционной технике синоптического анализа практически не освещен.

Переходя к фильтрации временного ряда, заметим, что исследуемый ряд значений зональной скорости ветра сформирован за период с 31.05.2010 г. по 01.09.2010 г. на поверхности 500 гПа в точке с координатами 55°с.ш. 100°в.д. Выбор точки объясняется её преимущественным нахождением вблизи центра антициклонического вихря на протяжении указанного периода. Определенным образом изменятся и характеристики переменного спектрального окна фильтра Ланцоша. Если в случае пространственных рядов величина m отождествлялась с зональным волновым числом, то сейчас она отображает характерный временной масштаб, который равен 1. Единичный интервал дискретности $\Delta = 1$, частота Найквиста $f_N = 0,5$. Особого внимания заслуживает выбор граничной частоты отсечения, аналогом которой для пространственных рядов выступала величина λ_c . Как указывалось выше, для процессов синоптического масштаба наиболее актуально выделение движений с периодом менее 10 сут, т.е. величина $\lambda_c = 10/360$ преобразуется в граничную частоту $f_c = 1/10$.

Выполненная фильтрация временного ряда с оптимальными параметрами окна, указанными в подрисуночной подписи рис. 5, позволяет видеть, что в отличие от пространственного ряда, вклад низкочастотной составляющей (рис. 5а) более выражен. На рис. 5б наблюдается своеобразная смена мест между кривыми низко- и высокочастотных составляющих.

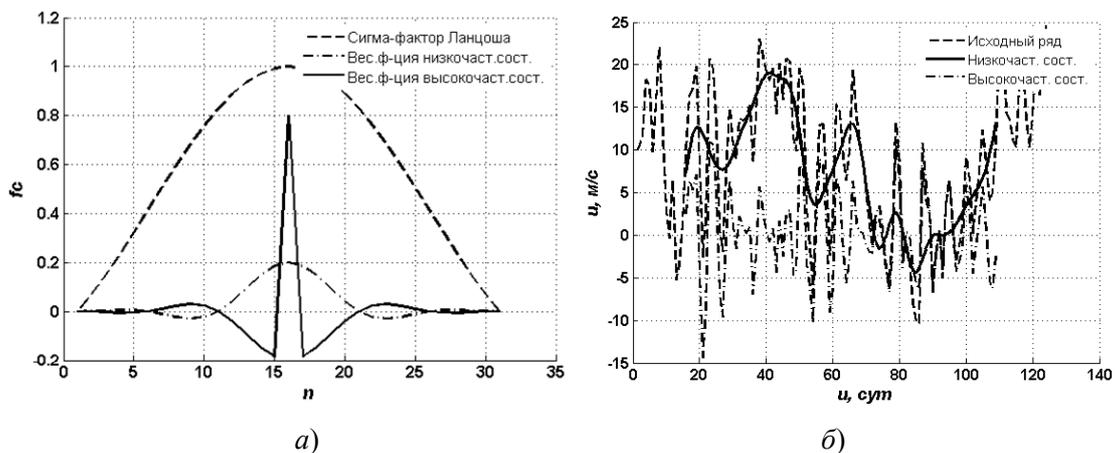


Рис. 5 – Фильтрация временного ряда при $m = 1$; $f_c = 1/10$; $\Delta = 1,0$ сут; $n = 15$.

Характерно, что возрастание значений высокочастотной составляющей зональной скорости ветра приходится на периоды наибольшей антициклонической активности (в районе 20 и 60 суток периода). Изменим характерный временной масштаб с $m = 1$ на $m = 10$, оставив неизменным количество весов. Результаты фильтрации (рис. 6) свидетельствуют, что сколь-либо существенных изменений низко- и высокочастотные составляющие не претерпевают. Действуя аналогично случаю фильтрации пространственного ряда, изменим количество весов с $n = 15$ до $n = 21$. Характерно, что несмотря на усиление сглаживания (рис. 7а), локальный пик в районе 90 суток исследуемого периода становится более выраженным (рис. 7б), что указывает на более

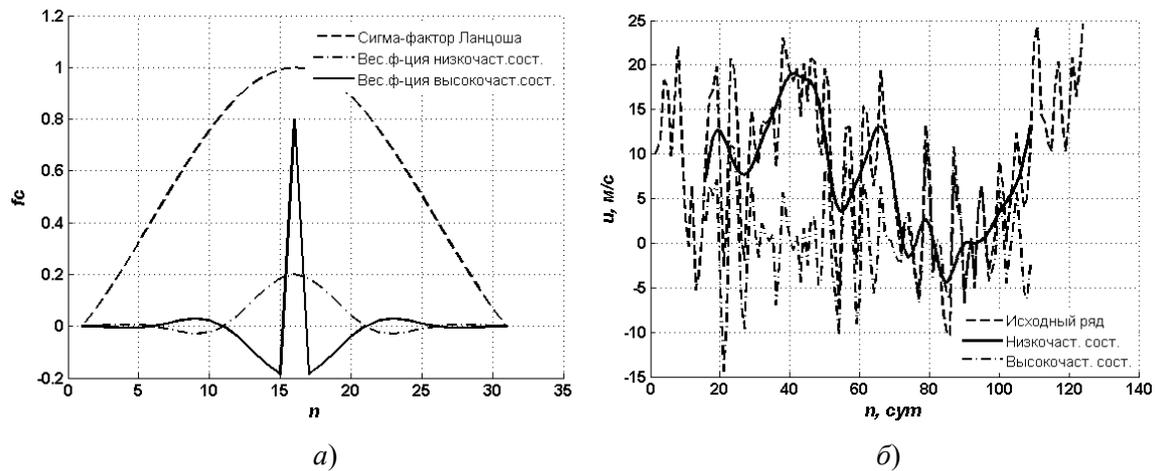


Рис. 6 – Фильтрация временного ряда при $m = 10$; $f_c = 1$; $\Delta = 1,0$ сут; $n = 15$.

корректный учет вклада высокочастотной составляющей при увеличении весовой функции. Проводя параллели с трансформацией пространственного ряда, можно заметить, что аналогичный эффект достигался при уменьшении количества весов. В целом, достаточно очевидно, что в рассмотренном временном ряде, несмотря на «зашумленность» зональной составляющей скорости ветра вследствие антициклонического типа циркуляции, её низкочастотная составляющая точно (разность значений между исходным рядом и низкочастотной составляющей отражает высокочастотная составляющая) выделена.

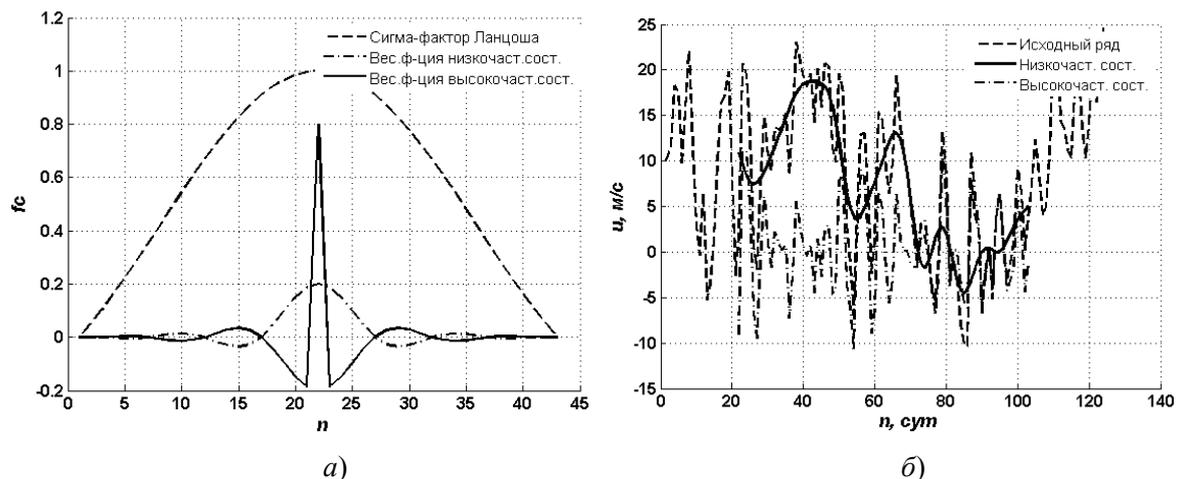


Рис. 7 – Фильтрация временного ряда при $m = 1$; $f_c = 1/10$; $\Delta = 1,0$ сут; $n = 21$.

Таким образом, проведение тестовых фильтраций пространственно-временных рядов позволяет заключить:

- 1) ясна фізическа інтерпретація сутності задачі фільтрації просторово-часових рядів визначається характеристиками змінного спектрального вікна фільтра Ланцоша, які дозволяють легко здійснювати перехід від одного типу даних до іншого;
- 2) параметри «вікна» повинні відображати фізически обґрунтовані характеристики розглянутого атмосферного процесу, їх спотворення призводить до штучному збільшенню або зменшенню внеску тієї або іншої складової;
- 3) збільшення крутизни характеристики фільтра залежить від збільшення кількості ваг, але платою за це є збільшення згладжування фільтрованого ряду і потенціальна можливість «просеивання» локальних піків для просторових рядів;
- 4) збільшення вагової функції для часового ряду дозволяє більш повно враховувати вплив високочастотної складової – локальні піки низькочастотної складової ідентифікуються краще.

Список літератури

1. Сергійченко А.Б. Signal Processing Toolbox – Обзор. <http://matlab.exponenta.ru/signalprocess/>.
2. Peixoto J.P., Oort A.H. Physics of Climate – American Institute of Physics, 1992. – 520 p.
3. Глушков А.В., Ефимов В.А., Кивзанов А.Ф. Телескопизований прогноз атмосферних аномалій на середні строки// Метеорологія, кліматологія і гідрологія. – 1999. – Вип. 38. – С. 9-13.
4. Паішевіч А.Р. Ррахунік характеристик енергообміну в струйних течіях з застосуванням фільтра Ланцоша // Труды Гидрометцентра СССР. – 1988. – Вип. 296 – С. 135-144.
5. Афонский А. А., Дьяконов В. П. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики / Под ред. проф. В. П. Дьяконова. – М.: СОЛОН-Пресс, 2009. – 248 стр.
6. Lanczos C. and Davis W.R. Collected published papers with commentaries:- North Carolina: NC State University. – 1998. – 42 p.
7. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. – М.: «Недра», 1987. – 221 с.
8. Duchon Claude E. Lanczos filtering in one and two dimensions // J. of Appl. Meteor. – 1979. – vol. 18, N 8. – P. 1016-1022.

Застосування цифрового фільтру Ланцоша зі змінним спектральним вікном для трансформації просторово-часових рядів. Грушевський О.М.

Проведення тестових фільтрацій одно- і двовимірних масивів зональної складової швидкості вітру дозволило дослідити вплив характеристик спектрального вікна фільтра Ланцоша на параметри низько- і високочастотних складових досліджуваних просторово-часових рядів.

Ключові слова: фільтрація просторових і часових рядів, ефект Гібса, сігма-фактор Ланцоша, вагова функція, частота Найквіста, частота відсікання.

Hrushevsky O. Application of the digital Lanczos filter with variable spectral window for transformation of spatio-temporal rows

Based upon test filtrations for one- and two-dimension arrays of the zonal wind component the influence of the features of the spectral window of the Lanczos filter over parameters of low- and high-frequency components for the spatio-temporal series involved is examined.

Keywords: filtration of spatial and temporal rows, Gibbs effect, Lanczos sigma-factor, function of the number of weights, Nyquist frequency, cutoff frequency.