

## О ПОСТРОЕНИИ ЗАМКНУТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ И РОСТА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

*В работе рассматриваются вопросы развития и роста сельскохозяйственных культур. Предлагается методы расчета биологических событий: «посев», «всходы», «закладка репродуктивного органа», «цветение», «созревание». Предлагается динамический расчет роста организма растения и его органов в зависимости от напряженности факторов внешней среды. Пересмотрена и упрощена динамическая система роста органов растения, что в целом составляет динамическую модель развития и роста растения.*

**Ключевые слова:** *рост, развитие, онтогенез, время, колебания, логистическая кривая, лист, стебель, корень, колос.*

**Введение.** До настоящего времени процессы развития и роста растений изучают с различных точек зрения. В тоже время, начиная с 70–80–ых годов прошлого столетия, создаются полноценные динамические модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур, которые обеспечили расчет составляющих продукционного процесса в зависимости от состояния факторов внешней среды. В таких моделях (Тооминг Х.Г. [1], Полевой А.Н. [2], Сиротенко О.Д. [3], Полуэктов Р.А. [4] и др.) определена основная структура продукционного процесса растений, где рассматриваются процессы фотосинтеза, дыхания, роста, развития в зависимости от состояния агрометеорологических факторов. В данной работе пересматриваются вопросы развития и роста растений с точки зрения таких моделей. Таким образом, **цель** данной работы – изучение процессов развития и роста сельскохозяйственных культур. К **задачам** работы относится расчет процессов развития и роста в таких динамических моделях.

### Материалы и методы исследования.

**§1. Развитие растений.** Мы будем отождествлять развитие растений с временными процессами, проходящими в их организме. Для устойчивого описания биологических событий в организме растения (например, фазы развития, этапы органогенеза) вводят две временные шкалы: 1. Календарное (или физическое) время и 2. Биологическая ось времени. Эти две временные шкалы изменяются равномерно, только биологическая ось времени имеет свойство сжиматься или растягиваться по отношению к физической оси времени. Такое свойство биологической оси времени определяется напряженностью факторов внешней среды и генотипом растения.

Для расчета общей биологической оси времени растения, соответствующей целому организму, используются разностные уравнения [5, 6]:

$$T^{j+1} = T_{всх} + T^j + DT_{opt} \cdot U_{SR}^j, \quad 0 < T \leq 0.5 \quad (1)$$

$$T^{j+1} = T^j + \frac{DT_{opt}}{U_{SR}^j}, \quad 0.5 \leq T \leq 1 \quad (2)$$

где  $T$  – биологическая ось времени, изменяется от некоторого  $T_{сем}$  до 1, отн. ед. биологического времени, где весь онтогенез составляет одну единицу биологического времени;  $T_{сем}$  – биологическое время семян, отн. ед. биологического времени;  $T_{всх}$  – биологическое время на момент всходов, отн. ед. биологического времени;  $DT_{opt}$  – константа, максимальная скорость развития, отн. ед. биологического времени·сут<sup>-1</sup>;  $U_{SR}$  – уровень напряженности факторов внешней среды, изменяется от нуля (нулевая

биологическая активность) до единицы (оптимальная биологическая активность), отн. ед.;  $j$  – номер суток расчетного периода.

В то же время, прежде чем последовательно использовать уравнения (1) и (2), необходимо определить **момент всходов**, или точнее биологическое время всходов  $T_{всх}$ . Для этого используется итерационное уравнение [7, 8]:

$$T_{всх} = T_{сем} + DT_{opt} \cdot n^j \cdot U_{SR}^j \cdot [-\cos(2\pi \cdot T_{сем}) + 1] + \frac{1}{2} (DT_{opt})^2 \cdot (n^j)^2 \cdot (U_{SR}^j)^2 \cdot [2\pi \cdot \sin(2\pi \cdot T_{сем})] \quad (3)$$

где  $n$  – число прожитых расчетных суток, изменяется нарастающим итогом. К моменту набора константы биологического времени, соответствующую моменту всходов, итерационное число расчетных суток  $n$  покажет длительность периода посева-всходы.

Кроме агротехнического события «посев» и фенологического события «всходы» мы можем рассчитать биологическое событие «**момента заложения репродуктивного органа**» [9, 10]. Как мы предполагаем, момент заложения репродуктивного органа растения соответствует одному из решений системы двух дифференциальных уравнений, описывающих движение процессов биологического времени в организме растения [10]. Для расчета этого биологического события необходимо, чтобы выполнилось условие: интегральный показатель уровня напряженности факторов внешней среды, уменьшенный в  $2\sqrt{\pi}$  раз должен совпасть со значением биологической оси времени  $T$ , рассчитанную по уравнению (1), [10]:

$$\frac{\sum_{i=1}^n U_{SR}^i}{2\sqrt{\pi}} = T^{j=n} \quad (4)$$

Здесь, так же как и прежде, индекс  $n$  – число прожитых расчетных суток  $j$ , начиная с момента посева.

Следующее событие, которое является центральным событием в материнском организме это – «**цветение**». Для расчета этого события используется простое условие [2, 6]:

$$T^j = 0.5 \quad (5)$$

Событие «**полное созревание**» находится так же из простого условия [6, 10]:

$$T^j = 1 \quad (6)$$

Таким образом, в этом параграфе, определена биологическая ось времени (1), (2) и как кардинальные точки на ней определены моменты всходов (3), заложения репродуктивного органа (4), цветения (5), созревания (6). Даты этих событий определяются из подсчета числа итераций (числа циклов - суток) динамического расчета, начиная от даты посева. Две выделенные шкалы времени, календарное время и биологическое время, связываются между собой одним временным параметром -  $DT_{opt}$ , который присущ всему отрезку онтогенеза, начиная от посева и до созревания. Эта константа  $DT_{opt}$  будет различна для разных видов и сортов сельскохозяйственных культур, и прежде всего для раннеспелых, среднеспелых и позднеспелых сортов. В целом, считая изменение напряженности уровня факторов внешней среды непрерывной, гладкой зависимостью, мы можем отметить, что и вся непрерывная биологическая ось времени, с присущими ей кардинальными точками будет непрерывно, гладко деформироваться под воздействием факторов внешней среды.

Уровень деформации определится генотипом растения, который определяет свойства отклика культуры на состояние факторов внешней среды.

**§2. Рост растений.** Процесс изменения сухой биомассы организма растения, как целого и его структурных органов как частей от целого, доходя до клетки, мы отождествим с ростом растений, при этом структурные органы могут появляться на различных временных участках. В качестве самого простого исследования, мы будем рассматривать четыре ткани: паренхимную, сосудисто-волокнистую, всасывающую и запасную. В соответствии с этим, выделяются листья, стебли, корни и репродуктивные органы. Будем считать, что эти выделенные органы или ткани составляют всю совокупность целого организма растения.

Согласно ранним исследованиям роста растений [11] процесс изменения сухой биомассы организма и его органов не может быть произвольным. Рост растений и их органов подчиняется закону сигмоидного роста. Этот закон выражается логистической кривой роста организма и его структурных органов. Рассматривая один вид ткани как единый, взаимосвязанный, структурный орган, например паренхимную ткань – лист, этот орган так же будет подчиняться закону сигмоидного роста. Кроме этого, закону сигмоидного роста подчиняется так же и целый организм растения. Однако логистическая кривая роста целого организма будет отличаться от логистической кривой роста вегетативного, структурного органа в силу старения и отмирания данного органа после его вегетативного роста. Процесс старения и отмирания данного вегетативного органа называют еще репродуктивным периодом роста вегетативного органа. В этот период развития вегетативного органа его сухая биомасса постепенно снижается и отмирает, доходя до определенного предела.

Логистическая кривая роста всего организма растения получена в работе [12] и имеет вид

$$\mu^j = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \sin(2 \cdot \pi \cdot T^j) + T^j, \quad (7)$$

где  $\mu$  – нормированная сухая биомасса целого растения, изменяется от некоторого, малого  $\mu_0$  до 1, отн. ед.

Дифференцируя уравнение логистической кривой (7) по переменной времени мы получим изменение скорости роста целого организма растения в течение онтогенеза по отношению к биологической оси времени целого организма

$$\frac{d\mu^j}{dT} = -\cos(2 \cdot \pi \cdot T) + 1, \quad (8)$$

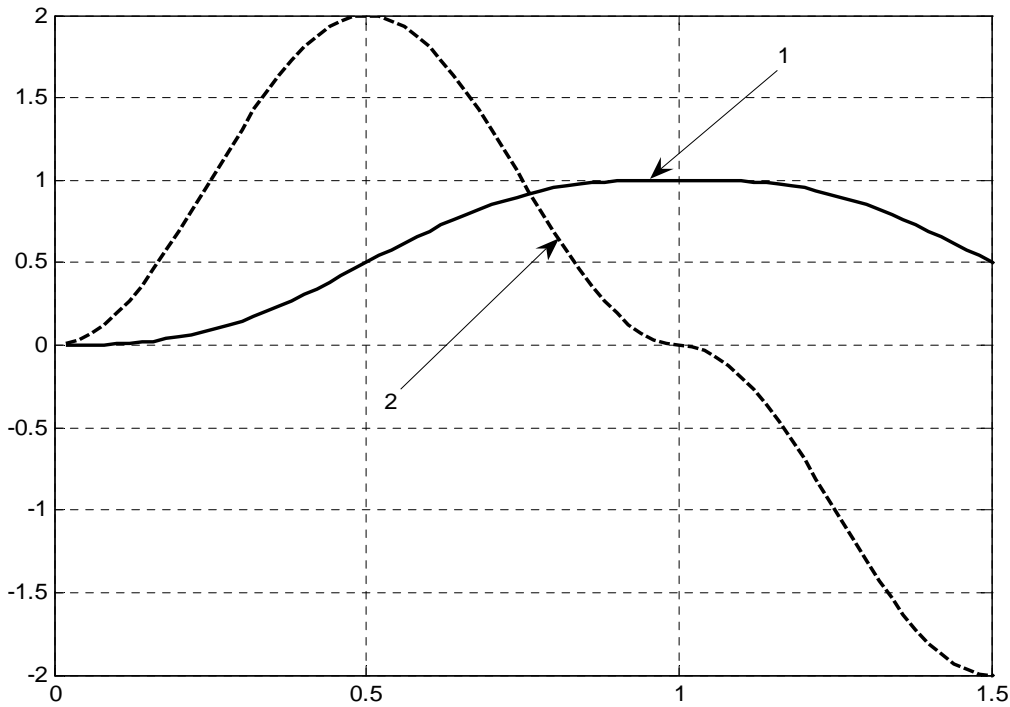
Уравнения (7) и (8) так же выражают логистическую кривую роста структурных органов в период вегетативного роста, когда идет накопление биомассы органа до своих максимальных размеров. В то же время, в процессе старения биомасса органа снижается, то есть скорость роста становится отрицательной. Тогда, умножая уравнение (8) на -1 мы получим отрицательную скорость роста органа и закономерность снижения биомассы этого органа в период старения, рис. 1.

Теперь запишем стандартную систему уравнений распределения ассимилятов по органам растения [13, 14]:

$$\begin{cases} m_L(T + \Delta T) = m_L(T) + \beta_L(T) \cdot \Delta M(T) - \omega_L(T) \cdot m_L(T) \\ m_S(T + \Delta T) = m_S(T) + \beta_S(T) \cdot \Delta M(T) - \omega_S(T) \cdot m_S(T) \\ m_R(T + \Delta T) = m_R(T) + \beta_R(T) \cdot \Delta M(T) - \omega_R(T) \cdot m_R(T) \\ m_P(T + \Delta T) = m_P(T) + \beta_P(T) \cdot \Delta M(T) + \omega_L(T) \cdot m_L(T) + \omega_S(T) \cdot m_S(T) + \omega_R(T) \cdot m_R(T), \end{cases} \quad (9)$$

где  $m_L$  – сухая масса листьев;  $m_S$  – сухая масса стеблей;  $m_R$  – сухая масса корней;  $m_P$  – сухая масса колосьев;  $\Delta M$  – прирост общей сухой массы растения за единицу временного шага;  $\beta_i$  – функции вегетативного роста органов растения ( $i = L, S, R, P$ );  $\omega_y$  – функции репродуктивного роста органов растения ( $y = L, S, R$ );  $T$  – общая временная ось;  $\Delta T$  – временной шаг; индекс  $L$  – листья, индекс  $S$  – стебли, индекс  $R$  – корни, индекс  $P$  – колосья.

$$\mu_i, \frac{d\mu_i}{dT_i}, \text{ отн. ед.}$$



Собственная временная ось  $i$ -го органа,  $T_i$ , отн. ед.

Рис. 1 – Логистическая кривая роста  $i$ -го вегетативного органа с учетом периода старения (1) и скорость роста этого же органа за тот же период по отношению к собственной временной оси (2).

Исходя из этой системы ростовых уравнений, существенную роль в ней играют функции распределения ассимилятов: функции периода вегетативного роста  $\beta_i$  и функции периода репродуктивного роста  $\omega_j$ . Функции периода вегетативного роста  $\beta_i$  показывают какая доля ассимилятов из всей совокупности вновь образовавшихся ассимилятов в целом организме растения направляются на рост того либо иного органа в данный момент времени онтогенеза  $T$ . Функции периода репродуктивного роста  $\omega_j$  показывают какая часть всей массы данного вегетативного органа перетекает в репродуктивный (запасующий) орган в течении данного временного шага роста  $\Delta T$ .

Нам остается вложить уравнение скорости роста органа, рис. 1, в эту систему уравнений распределения ассимилятов по органам растения, при этом считая, что логистическая кривая роста целого организма растения подчиняется закономерности, выраженной уравнением (8). Будем рассматривать систему роста органов (9) по частям,

то есть для каждого динамического слагаемого. Так, рассмотрим динамические слагаемые, характеризующие вегетативный рост

$$\beta_L(T) \cdot \Delta M(T); \beta_S(T) \cdot \Delta M(T); \beta_R(T) \cdot \Delta M(T); \beta_P(T) \cdot \Delta M(T). \quad (10)$$

С учетом работ [14, 15], каждое слагаемое (10) будет иметь вид:

$$\frac{[-\cos(2\pi \cdot \tau_i) + 1] \cdot A_i}{[-\cos(2\pi \cdot T) + 1]} \cdot DM_{\max} \cdot U_{SR}^j \cdot [-\cos(2\pi \cdot T) + 1], \quad (11)$$

или

$$\beta_i(T) \cdot \Delta M(T) = DM_{\max} \cdot A_i \cdot U_{SR}^j \cdot [-\cos(2\pi \cdot \tau_i) + 1], \quad \tau_0 \leq \tau_i \leq 1, \quad (12)$$

где  $DM_{\max}$  – максимальная скорость роста целого организма растения в оптимальных условиях внешней среды,  $\Gamma_{с.в.} \cdot \text{сут}^{-1} \cdot \text{растение}^{-1}$ ;  $A$  – амплитуда колебаний сухой биомассы  $i$ -го органа в онтогенезе, находится как соотношение биомасс всех органов в период их максимального роста, отн. ед.;  $\tau$  – собственная временная ось  $i$ -го органа, отн. ед.

Таким образом, уравнение (12) описывает вегетативный рост данного  $i$ -го органа по отношению к собственной временной шкале этого органа до начала старения:  $\tau_0 \leq \tau_i \leq 1$ . В то же время, процесс старения начинается с момента завершения вегетативного роста органа, то есть при условии  $\tau_i > 1$  и описывается динамическими слагаемыми

$$\omega_L(T) \cdot m_L(T); \omega_S(T) \cdot m_S(T); \omega_R(T) \cdot m_R(T). \quad (13)$$

В соответствии с определением каждого динамического слагаемого в период репродуктивного роста мы можем записать их явную форму. При этом, мы считаем, что процесс старения присущ целому организму растения:

$$\omega_y(\tau_y) \cdot m_L(\tau_y) = DM_{\max} \cdot \frac{DT_{opt}}{U_{SR}^j} k_y \cdot (-1) \cdot [-\cos(2\pi \cdot \tau_y) + 1] \cdot A_y, \quad 1 < \tau_y, \quad (14)$$

где  $k$  – коэффициент преобразования общей временной оси  $T$  в собственную ось времени роста данного  $y$ -го структурного вегетативного органа (см. [14]).

Теперь необходимо вернуться к системе уравнений роста всей совокупности органов растения (9) и с учетом знаков каждого динамического слагаемого и значений собственной временной оси органа подставить каждое динамическое слагаемое в эту систему уравнений.

**§3. Уровень напряженности факторов внешней среды.** К факторам внешней среды мы отнесем фактор тепла, фактор влаги, фактор света, фактор минерального питания растений. Именно эти факторы являются наиболее подвижными и определяют колебания развития и роста сельскохозяйственных культур. Мы коротко дадим основную сводку определения уровня напряженности каждого фактора и их совокупного влияния на процессы развития и роста растений. Все представленные взаимосвязи получены методами экспериментальных наблюдений для той либо иной культуры. Здесь следует отметить, что определение уровня напряженности факторов внешней среды, или отклика культуры на движение факторов внешней среды является уникальным для каждого вида, сорта культуры. Так, для каждой культуры существует своя зона толерантности диапазона изменения напряженности того либо иного фактора и своя точка оптимума.

Фактор тепла

$$\psi = 1 - a_t \cdot t_{opt}^2 (t_n - 1)^2. \quad (15)$$

Фактор влаги

$$\gamma = 1 - a_w \cdot W_{opt}^2 \cdot (W_n - 1)^2. \quad (16)$$

Фактор света

$$I = 1 - \exp(-C \cdot I_{opt} \cdot I_n) \quad (17)$$

Фактор минерального питания [16, 17]:

$$\alpha_h = \frac{Y_{NPK}}{Y_{NPK \max}}, \quad (18)$$

$$Y_{NPK} = \frac{4C_{h \max}}{S_h^0 \cdot k_h^p} \left[ -\frac{1}{3} (k_h^u)^2 \cdot X_h^3 + \left( \frac{1}{2} k_h^u \cdot k_h^p \cdot S_h^0 - k_h^u \cdot k_h^p \cdot S_h \right) \cdot X_h^2 + \right. \\ \left. + \left( k_h^p \cdot k_h^p \cdot S_h^0 \cdot S_h - (k_h^p \cdot S_h)^2 \right) \cdot X_h \right] + \frac{k_k^p \cdot S_k}{k_k}, \quad (19)$$

где  $I_n$ ,  $t_n$ ,  $W_n$  – нормированные значения потока ФАР, температуры воздуха, запасов продуктивной влаги в почве, отн. ед.;  $I_{opt}$ ,  $t_{opt}$ ,  $W_{opt}$  – соответственно оптимальные значения потока ФАР ( $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$ ), температуры воздуха ( $^{\circ}\text{C}$ ), запасов продуктивной влаги в почве (мм) для величины скорости накопления биомассы либо для общего газообмена культуры;  $C$ ,  $a_t$ ,  $a_w$  – параметры уравнений: определяют биологические особенности отклика скорости роста биомассы на влияние факторов внешней среды;  $X_h$  – величина вносимой дозы удобрения данного вида ( $h=N, P, K$ ), кг действующего вещества на га;  $S_h$  – содержание данного элемента питательного вещества в почве перед внесением удобрений ( $h=N, P, K$ ), кг действ. в-ва  $\cdot \text{га}^{-1}$ ;  $S_h^0$  – оптимальная величина содержания данного элемента питательного вещества в почве для данной культуры ( $h=N, P, K$ ), кг действ. в-ва  $\cdot \text{га}^{-1}$ ;  $k_h^u$  – коэффициент использования данного питательного вещества из удобрений ( $h=N, P, K$ ), отн. ед.;  $k_h^p$  – коэффициент использования данного питательного вещества из почвы ( $h=N, P, K$ ), отн. ед.;  $k_h$  – коэффициент содержания данного питательного вещества в общей биомассе растений ( $h=N, P, K$ ), отн. ед.;  $C_{h \max}$  – максимальная отзывчивость данной культуры на внесение минеральных удобрений ( $h=N, P, K$ ), кг  $\cdot \text{кг}^{-1}$  действ. в-ва.

Окончательно, уровень напряженности факторов внешней среды определится мультипликативным образом на данный момент развития и роста:

$$U_{SR}^j = \psi \cdot \gamma \cdot I \cdot \alpha_h \quad (20)$$

**Результаты исследования и их анализ.** Мы говорим о замкнутой модели развития и роста растений. Такая постановка вопроса обеспечивается наличием двух констант:  $DT_{opt}$ ,  $DM_{max}$ , которые характеризуют скорость развития культуры и скорость роста культуры. Кроме этого уровень напряженности факторов внешней среды участвует в расчетах, как развития, так и роста растений. В тоже время предложенная динамическая модель не решает полноценно вопросы развития и роста растений, поскольку в этой модели рассматривается всего четыре ткани или органа.

**Выводы.** Предложена динамическая модель развития и роста сельскохозяйственных культур.

### Список литературы

1. Тооминг Х.Г. Экологические принципы максимальной продуктивности посевов. – Ленинград. Гидрометеоиздат. - 1984. – 264 С.
2. Полевой А.Н. Теория и расчет продуктивности сельскохозяйственных культур. – Ленинград. Гидрометеоиздат. - 1983. – 175 С.
3. Сиротенко О.Д. Математическое моделирование водно-теплового режима и продуктивности агроэкосистем. – Ленинград. Гидрометеоиздат. – 1981. - 167 С.

4. Полуэктов Р.А. Динамические модели агроэкосистемы. – Ленинград. Гидрометеиздат. - 1991. – 312 С.
5. Наумов М.М. Рост растений и биологическое время. // Вісник ОДЕКУ. - 2005. – Вип. 1. – С.72 - 78.
6. Наумов М.М. Рост растений и биологическое время. Результаты расчетов. // Вісник ОДЕКУ. – 2006. - Вип. 2. – С. 101 – 107.
7. Наумов М.М. Период посев – всходы растений и биологическое время. // Український гідрометеорологічний журнал. – 2006. - № 1. - С. 135 – 139.
8. Наумов М.М. Период посев – всходы растений и биологическое время. Результаты расчетов. // Український гідрометеорологічний журнал. – 2007. - № 2. - С. 149 – 155.
9. Наумов М.М. Биологическое время растения подсолнечника как грубая динамическая система. // Метеорологія, кліматологія та гідрологія. – 2000. - Вип. 40. - С. 64 – 73.
10. Наумов М.М. О существовании грубой динамической системы биологического времени у растений на примере культуры подсолнечника. // Метеорологія, кліматологія та гідрологія. – 2001. - Вип. 43. - С. 136 – 146.
11. Обручева Н.В., Ковалев А.Г. О физиологической интерпретации сигмоидных кривых роста органов растений. // Физиология растений. – 1979. - Т. 26. - Вып. 5. - С. 1029 – 1043.
12. Наумов М.М. Векторный характер биологического времени растений. Циркуляція біологического времени. // Метеорологія, кліматологія та гідрологія. – 2005. - Вип. 49. - С. 328 – 339.
13. Росс Ю.К. К математическому описанию роста растений. // ДАН СССР. – 1966 - Т. 171. № 2. – С. 481 – 483.
14. Наумов М.М. Теоретический метод определения ростовых функций органов растений. // Український гідрометеорологічний журнал. – 2010. - № 6. - С. 148 – 155.
15. Наумов М.М. Модель роста общей биомассы сельскохозяйственных культур, построенная на основе логистической кривой. // Вісник ОДЕКУ. – 2010. - Вип. 9. - С. 63 – 72.
16. Наумов М.М. Учет уровня минерального питания растений в динамических моделях продукционного процесса. // Вісник ОДЕКУ. – 2006. - Вип. 3. - С. 114 – 123.
17. Раденович Б. Влияние минерального питания на продолжительность этапов органогенеза подсолнечника в условиях орошения. – В кн.: VII Международная конференция по подсолнечнику. Тезисы докладов. 27 июня – 3 июля 1976. - С. 106 – 108.

#### **Про будівництво замкненої динамічної моделі розвитку і росту сільськогосподарських культур**

**Наумов М.М.**

*В роботі розглядаються питання розвитку і росту сільськогосподарських культур. Пропонуються методи розрахунку біологічних подій: «посів», «сходи», «закладка репродуктивного органу», «цвітіння», «дозрівання». Пропонується динамічний розрахунок росту організму рослини і його органів залежно від напруженості чинників зовнішнього середовища. Переглянута і спрощена динамічна система росту органів рослини, що в цілому складає динамічну модель розвитку і росту рослини.*

**Ключові слова:** *рост, розвиток, онтогенез, час, коливання, логістична крива, лист, стебло, корінь, колос.*

#### **About constructing a preliminary reserved dynamic model of development and growth of agricultural cultures. Naumov M.M.**

*In work the questions of development and growth of agricultural cultures are examined. It is offered methods of computation of biological events: «sowing», «shoots», «book-mark of reproductive organ», «flowering», «ripening». Dynamic computation of growth of organism of plant and his organs depending on tension of factors of external environment is offered. It is revised and simplified the dynamic system of growth of organs of plant, that on the whole makes the dynamic model of development and growth of plant.*

**Keywords:** *growth, development, ontogenesis, time, vibrations, logistic curve, leave, stem, root, ear.*