

М.В. Калашник¹, к. ф.–м. н., **Б.Я. Шмерлин**², к. ф.–м. н.

¹Государственный технический университет атомной энергетики, Обнинск, Россия.

²ГУ НПО “Тайфун”, Институт экспериментальной метеорологии, Обнинск, Россия.

СПОНТАННЫЙ РОСТ ВОЗМУЩЕНИЙ ТИПА УРАГАНА В ТЕОРИИ ВЛАЖНОКОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

Аннотация. Проведено обобщение классической задачи Рэля о конвективной неустойчивости слоя атмосферы на случай наличия конденсации водяного пара. Продемонстрировано принципиальное отличие “влажной” конвекции от конвекции Рэля: область неустойчивости в общем случае состоит из двух подобластей, в одной из которых наибольшей скоростью роста обладают локализованные возмущения – конвективные вихри со структурой, характерной для ураганов на ранней стадии. Найдено необходимое и достаточное условие существования такой подобласти.

Ключевые слова: теория влажноконвективной неустойчивости, “влажная” конвекция, конвекция Рэля, конвективные вихри, ураган.

1 Введение

Бурный рост количества публикаций, посвящённых исследованию влажноконвективной неустойчивости, связан со стремлением глубже понять механизмы зарождения тропических циклонов (ураганов), облачных систем, отдельных облаков, в развитии которых существенную роль играет выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара. Исследование происходящих процессов осложняется тем, что объёмное тепловыделение, обусловленное фазовыми переходами, нельзя считать заданным. Оно определяется динамикой процесса, а именно, скрытая теплота конденсации выделяется лишь на восходящей ветви циркуляции, на нисходящей ветви поглощение тепла на испарение капель отсутствует в силу выпадения капель в виде дождя. Многие важные особенности таких процессов можно понять на основе упрощённых моделей, в которых в уравнения термогидродинамики вводится дополнительный источник тепла, обусловленный фазовыми переходами, пропорциональный вертикальной скорости при восходящих движениях и обращющийся в нуль при нисходящих. Однако и в такой упрощённой постановке до последнего времени вопрос оставался изученным крайне недостаточно, поскольку исследуемая задача становится существенно нелинейной: один из коэффициентов системы уравнений терпит разрыв на границе восходящих и нисходящих движений, положение которой заранее неизвестно и должно быть найдено в процессе решения задачи. Аналитические результаты были получены лишь для невязкой нетеплопроводной атмосферы [6–8,11]. Были построены семейства экспоненциально нарастающих со временем локализованных и периодических по пространству решений, для которых вертикальная скорость имела разрыв на границе областей восходящих и нисходящих движений. Оказалось, что чем меньше масштаб возмущения, тем быстрее оно развивается за счёт влажноконвективной неустойчивости. Был сделан вывод о том, что влажноконвективная неустойчивость приводит к росту возмущений масштаба кучевого облака и не может приводить к зарождению и развитию возмущений масштаба урагана. Очевидно, однако, что предпочтительный масштаб неустойчивых возмущений должен определяться именно диссипативными факторами, эффективно подавляющими мелкомасштабные движения. Попытки учесть вязкость и теплопроводность были предприняты в целом ряде полуаналитических и численных исследований [1–5,9,10], однако вопросы о структуре наиболее неустойчивых мод, о

границах области неустойчивости, о возможности нарастания локализованных возмущений остались не выясненными до конца в силу неизбежной фрагментарности численных исследований.

С учётом вязкости и теплопроводности в постановке, максимально приближенной к постановке классической задачи Рэля о конвективной неустойчивости слоя атмосферы, нами построена аналитическая теория влажноконвективной неустойчивости [12,13,16,17], позволившая дать исчерпывающие ответы на сформулированные выше вопросы. Как и следовало ожидать, решение “вязкой” задачи качественно отличается от решения “невязкой” задачи. В частности, упоминавшиеся выше семейства разрывных решений оказались лишены физического смысла за исключением одного, для которого, однако, радиус области восходящих движений обращается в нуль: оно одно может быть получено из “вязкой” задачи в результате соответствующего предельного перехода.

Предложенная теория позволяет с единой точки зрения интерпретировать результаты уже выполненных численных исследований проблемы, а также данные натуральных наблюдений. Она может явиться хорошей основой для дальнейшего целенаправленного проведения численных исследований и интерпретации эмпирических данных. Вместе с тем, следует отметить, что по прошествии почти двадцати лет с момента опубликования, указанные работы авторов остаются неизвестны широкому кругу исследователей, продолжающих интенсивно заниматься проблемой влажноконвективной неустойчивости. В связи с этим, нам представляется целесообразным ещё раз привлечь внимание к уже полученным результатам, которые за прошедшее время не утратили своей актуальности. Данная публикация не содержит новых результатов по сравнению с [12,13,16,17]. Она является обобщением теоретического анализа, проведённого нами в указанных работах.

2 Постановка задачи и схема теоретического анализа

Рассматривается вращающийся насыщенный водяным паром слой вязкой теплопроводной термически стратифицированной атмосферы, заключенный между двумя бесконечными горизонтальными границами, на которых отсутствует трение и поддерживаются постоянные температуры. Система уравнений в приближении Буссинеска и гидростатики и краевые условия Рэля имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} + lv + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \Delta u, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial y} - lv + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \Delta v, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -Gw + v \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mu \Delta \theta + Q, \quad (1d)$$

$$Q = \begin{cases} -\alpha_0 \frac{L_V}{C_p} \frac{ds}{dz} w = \alpha_0 (\gamma_a - \gamma_m) w, & w > 0 \\ 0, & w < 0 \end{cases}, \quad (1e)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = \theta = 0, \quad z = 0, H, \quad (1f)$$

где u, v, w – составляющие скорости вдоль горизонтальных осей x, y и направленной вертикально вверх оси z соответственно; $f = p' / \rho_0$, $\theta = \alpha_0 \theta'$, p' , θ' – отклонения давления и потенциальной температуры от их фоновых значений, ρ_0 – средняя плотность среды; $\alpha_0 = 1/T_0$ – коэффициент теплового расширения, T_0 – средняя температура среды; $G = \alpha_0 (\gamma_a - \gamma)$ – параметр стратификации, γ_a – сухоадиабатический градиент, $\gamma = -\partial T / \partial z$ – фоновый градиент температуры; l – параметр Кориолиса; C_p – теплоемкость; g – ускорение свободного падения; μ, ν – коэффициенты турбулентной вязкости в горизонтальном и вертикальном направлении, принятые равными соответствующим коэффициентам турбулентной теплопроводности; $\gamma_m = \gamma_a + (L_V / C_p) \partial s / \partial z$ – влажноадиабатический градиент температуры; L_V – удельная теплота конденсации; s – массовая доля насыщенного пара; H – толщина слоя атмосферы.

Приведенная выше система уравнений влажной конвекции отличается от классической системы уравнений Рэля (“сухой” конвекции) только дополнительным источником тепла фазовых переходов (1e). Как указывалось выше, данный источник соответствует выделению скрытой теплоты конденсации на восходящей ветви циркуляции, где избыток водяного пара конденсируется и мгновенно выпадает в виде дождя. При этом предполагается отсутствие поглощения тепла на испарение капель на нисходящей ветви циркуляции ввиду отсутствия капель. Для него использована общепринятая параметризация, известная как “условное нагревание”. Она хорошо согласуется с CISK–параметризацией тепловыделения (Conditional Instability of the Second Kind), широко используемой в численных моделях эволюции тропических циклонов с параметризацией конвективной облачности [15]. Согласно CISK - параметризации, конденсационное тепловыделение пропорционально вертикальной скорости на верхней границе погранслоя при восходящих движениях и обращается в нуль при нисходящих. Таким образом, указанная система уравнений может быть использована для описания процессов различных масштабов от масштаба отдельного конвективного облака до масштаба тропического циклона. При этом необходимо иметь в виду, что для крупномасштабных процессов уравнения записаны относительно осредненных крупномасштабных переменных.

Как указывалось выше, система уравнений является существенно нелинейной, поскольку граница области восходящих движений заранее неизвестна и должна быть найдена в процессе решения задачи.

Исследуется потеря устойчивости состояния покоя. Приведём схему решения задачи. Система уравнений и краевые условия допускают разделение переменных. Разыскиваются экспоненциально растущие решения системы уравнений вида:

$$(u, v, f) = (u(x, y), v(x, y), f(x, y)) \cos(\pi z/H) \exp(kt),$$

$$(w, \theta) = (w(x, y), \theta(x, y)) \sin(\pi z/H) \exp(kt).$$

После разделения переменных и обезразмеривания исходная система уравнений сводится к стационарной системе уравнений относительно пространственных амплитуд $u(x, y), v(x, y), \dots, \theta(x, y)$. Предложенный нами подход, позволяющий исследовать задачу до конца аналитическими методами, заключается в следующем. На первом этапе для стационарной системы уравнений находится функция Грина точечного по горизонтальным координатам источника тепла. Затем в выражение для амплитуды вертикальной скорости, представляющее собой свёртку амплитуды источника тепла с соответствующей функцией Грина, подставляется амплитуда источника тепла (1e) и получается, таким образом, нелинейное интегральное уравнение относительно амплитуды вертикальной скорости вида [12,13,16,17]:

$$w(x, y) = R_m \iint_{w>0} G_w(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

где $R_m = g\alpha_0(\gamma_a - \gamma_m)H^4/\pi^4\mu\nu$ – введённое авторами число, характеризующее интенсивность конденсационного тепловыделения, G_w – функция Грина для амплитуды вертикальной скорости, зависящая от безразмерных параметров задачи - числа Рэлея $R = g\alpha_0(\gamma_a - \gamma)H^4/\pi^4\mu\nu$, числа Экмана $E = \pi^2\nu/H^2l$ и безразмерного инкремента нарастания $kH^2/\pi^2\nu$. В каждой из областей как восходящих, так и нисходящих движений исходная система уравнений может быть сведена к одному линейному уравнению с постоянными коэффициентами четвёртого порядка по пространственным координатам относительно амплитуды вертикальной скорости $w(x, y)$. Отсюда следует, что в двумерном случае, когда нет зависимости от одной из горизонтальных координат и возмущения представляют собой конвективные валы, в области восходящих движений решение для w необходимо разыскивать в виде суммы четырёх экспонент [12,16,17]. Подставляя соответствующее выражение для w в левую и правую части интегрального уравнения (2) и учитывая, что на границах областей восходящих движений w обращается в нуль, получаем систему десяти алгебраических уравнений относительно десяти неизвестных: “радиуса” области восходящих движений x_0 , пространственного периода возмущения L , четырёх показателей экспонент и четырёх соответствующих коэффициентов при экспонентах. Анализ системы уравнений позволяет установить пространственную структуру и скорость роста неустойчивых мод в зависимости от параметров задачи, а также построить область неустойчивости. В осесимметричном случае [13] решение для w необходимо разыскивать в виде суперпозиции соответствующих цилиндрических функций. Таким образом, использование предложенного нами подхода позволяет почти в два раза снизить порядок системы алгебраических уравнений по сравнению с возможным альтернативным подходом, заключающимся в сшивке решений на границах областей восходящих и нисходящих движений.

3 Результаты исследования

Приведем результаты анализа для случая, когда неустойчивые возмущения представляют собой локализованные либо периодические по пространству конвективные валы [12,16,17].

На рис.1 на плоскости параметров задачи E^{-1}/R_m и R/R_m приведена область Ω . Сплошные линии – линии равных значений параметра $\sigma = (2/R_m)(1 + kH^2/\pi^2\nu)$. При фиксированном значении R_m областью неустойчивости является часть области Ω , ограниченная сверху кривой $\sigma = 2/R_m$. Пунктир – линии равных значений вспомогательного параметра $\lambda \leq 1$. Область неустойчивости состоит из двух подобластей, разделенных кривой $\lambda = 0$. В верхней подобласти наибольшей скоростью роста обладают локализованные по пространству возмущения – уединенные конвективные валы. В нижней половине слоя имеет место циклоническая циркуляция и приток воздушных масс к оси вала, в верхней половине слоя – антициклоническая циркуляция и отток воздушных масс от оси вала. Вблизи оси вала имеют место восходящие движения, сменяющиеся нисходящими на периферии вала. Построенное решение является двумерным аналогом осесимметричного локализованного вихря со структурой, характерной для тропических циклонов на ранней стадии развития.

В нижней подобласти области неустойчивости наибольшей скоростью роста обладают периодические по пространству возмущения – системы конвективных валов или "облачные улицы". Имеет место существенная локализация областей восходящих движений.

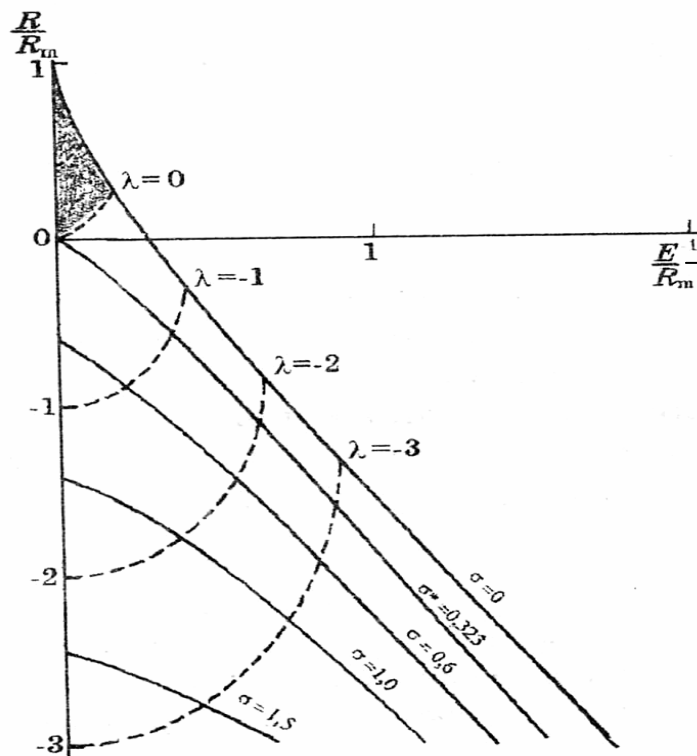


Рис. 1 – Область Ω на плоскости определяющих параметров E^{-1}/R_m и R/R_m . Заштрихована подобласть, в которой наибольшей скоростью роста обладает локализованная мода.

В области неустойчивости кривые $\sigma = const$ – это кривые равных значений безразмерной скорости роста возмущений $\frac{\kappa H^2}{\pi^2 \nu} = \frac{\sigma R_m}{2} - 1$. Кривые $\lambda = const$ – это кривые одинаковых значений безразмерного “радиуса” областей восходящих движений наиболее неустойчивых возмущений $\frac{x_0}{H} \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{R_m(1-\lambda)}}$. В нижней подобласти области неустойчивости кривые $\lambda = const$ являются также кривыми одинакового значения отношения площади восходящих движений к площади нисходящих движений $\frac{x_0}{L - 2x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+|\lambda|^{-1}}}$. На границе между подобластями $|\lambda| \rightarrow 0$, $x_0/L \rightarrow 0$, и переход от

периодических решений к локализованным происходит непрерывным образом. Отношение аспекта ячейки (пространственный период к высоте) при этом стремится к бесконечности. Таким образом, каждой точке области неустойчивости соответствует возмущение вполне определенной пространственной структуры, имеющее наибольшую вполне определенную скорость роста. Для локализованных возмущений безразмерный радиус области восходящих движений достигает максимального значения в верхней точке области неустойчивости. При $R_m \gg 1$ этой точке соответствует

$\lambda_{\max} \cong 1 - (\pi/R_m)^{2/3}$, и в размерном виде имеем

$x_{0\max} = \left[\pi^2 H^2 \mu^4 / g \alpha_0 (\gamma_\alpha - \gamma_m) \nu^2 \right]^{1/6}$. При значениях параметров, характерных для тропосферы, получаем оценку $x_{0\max} \cong 300$ км, что соответствует наблюдаемым размерам области выпадения осадков в тропических циклонах. При значениях параметров, характерных для движений масштаба облака, имеем $x_{0\max} \cong 700$ м, что удовлетворительно согласуется с параметрами отдельного облака [16].

Из рис. 1 следует, что верхняя подобласть области неустойчивости появляется только при $\sigma < \sigma^* = 0,323$, т.е. при $R_m > 2/0,323 = 6,19$. При $R_m < 6,19$ неустойчивыми могут быть только периодические по пространству возмущения. Условие $R_m > 6,19$, необходимое и достаточное для существования верхней подобласти области неустойчивости, в которой наибольшей скоростью роста обладает локализованная мода, можно интерпретировать как условие достаточно сильного конденсационного тепловыделения в поднимающемся объеме воздуха. При $R_m \rightarrow 0$ имеет место предельный переход к классической “сухой” конвекции Рэлея [12].

В [13] нами построены осесимметричные локализованные решения уравнения (2) со структурой, характерной для тропических циклонов на ранней стадии развития, экспоненциально растущие при потере устойчивости состояния покоя атмосферы. Показано, что такие возмущения растут быстрее двумерных локализованных конвективных валов, о которых речь шла выше.

4 Выводы и заключение

Проведено обобщение классической задачи Рэлея о конвективной неустойчивости слоя атмосферы на случай наличия в атмосфере конденсации водяного пара. Система уравнений “влажной” конвекции отличается от системы уравнений Рэлея “сухой” конвекции только дополнительным источником тепла фазовых переходов. Этот

источник пропорционален вертикальной скорости на восходящей ветви циркуляции и обращается в нуль на нисходящей ветви циркуляции. Указанная параметризация известна как “условное нагревание”. Она хорошо согласуется с CISK-параметризацией тепловыделения, используемой в моделях эволюции тропических циклонов с параметризацией конвективной облачности. Поскольку граница области восходящих движений заранее неизвестна, система уравнений становится нелинейной. Получено исчерпывающее аналитическое решение задачи. Установлена структура и скорость роста наиболее неустойчивых мод в зависимости от безразмерных параметров задачи, а также построена область неустойчивости в пространстве параметров. Обнаружено принципиальное отличие “влажной” конвекции от “сухой” конвекции Рэля: в общем случае область неустойчивости состоит из двух подобластей, в одной из которых наибольшей скоростью роста обладают локализованные возмущения со структурой типа урагана (тропического циклона) на ранней стадии развития. Найдено необходимое и достаточное условие существования такой подобласти. Лишь во второй подобласти наибольшей скоростью роста обладают периодические по пространству нелинейные структуры (ансамбли конвективных облаков и облачные улицы), пространственный период которых стремится к бесконечности на границе между подобластями. Для них в пределах каждой конвективной ячейки характерна существенная локализация областей восходящих движений, так что коэффициент покрытия атмосферы облачностью оказывается всегда строго меньшим единицы. Продемонстрирован предельный переход к конвекции Рэля.

Предложенная теория описывает ряд особенностей динамики облаков, облачных улиц, тропических циклонов, основным источником энергии которых является теплота конденсации водяного пара. Она вносит ясность в вопрос о том, могут ли CISK-параметризация и подобные параметризации тепловыделения приводить к зарождению из состояния покоя локализованных вихрей масштаба тропического циклона [14,15].

Литература

1. *Asai, T., I. Nakasui* (1992) A further study of a preferred mode of cumulus convection in a conditionally unstable atmosphere. *J. Met. Soc. Jap.*, Vol. 60, No. 1, p. 425–431.
2. *Asai, T., I. Nakasui* (1977) On the preferred mode of cumulus convection in a conditionally unstable atmosphere. *J. Met. Soc. Jap.*, Vol. 55, No. 2, pp. 151–167.
3. *Bretherton, C.S.* (1987) A theory for nonprecipitating moist convection between two parallel plates. Part.1: thermodynamics and “linear” solution. *J. Atm. Sci.*, Vol. 44, No. 14, pp. 1809–1827.
4. *Delden, A.* (1985) On the preferred mode of cumulus convection. *Beitr. Phys. Atmos.*, Vol. 58, No. 2, pp. 202–219.
5. *Huang, X.Y.* (1990) The organization of moist convection by internal gravity waves. *Tellus*, Vol. 42(a), pp. 270–285.
6. *Haque, S.M.* (1958) The initiation of cyclonic circulation in a vertically unstable air mass. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, Vol. 78, pp. 394–406.
7. *Kuo, H.L.* (1961) Convection in a conditionally unstable atmosphere. *Tellus*, Vol. 13, pp. 441 - 459.
8. *Lilly, D.K.* (1960) On the theory of disturbances in a conditionally unstable atmosphere. *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 88, pp. 1–17.
9. *Yamasaki, M.* (1974) Finite amplitude convection in a conditionally unstable stratification. *J. Met. Soc. Jap.*, Vol. 52, No. 4, pp. 365–379.
10. *Yamasaki, M.* (1972) Small amplitude convection in a conditionally unstable stratification. *J. Met. Soc. Jap.*, Vol. 50, No. 5, pp. 465–481.

11. Гилл А.Е. Спонтанный рост возмущений типа урагана в простой линейной модели, включающей реализацию скрытой теплоты. – Интенсивные атмосферные вихри/ Под ред. Л. Бенгтссона, Дж. Лайтхилла. – М.: Мир, 1985, с. 130–147.
12. Калашник М.В., Шмерлин Б.Я. О конвективной неустойчивости влажного насыщенного слоя. – Изв. АН СССР, ФАО, т. 26, № 10, 1990, с.1034–1044.
13. Калашник М.В., Шмерлин Б.Я. Спонтанный рост возмущений типа урагана в модели влажной конвекции. – Изв. АН СССР, ФАО, т. 26, № 8, 1990, с.787–793.
14. Руткевич П.Б. Методы описания крупномасштабных атмосферных вихрей типа тропического циклона. – Препринт № Пр-2073. Москва, ИКИ РАН, 2002, 61 с.
15. Хаин А.П. Математическое моделирование тропических циклонов. – Л.: Гидрометеиздат, 1989, 246 с.
16. Шмерлин Б.Я., Калашник М.В. Структура растущих локализованных мод в модели влажной конвекции. – Изв. АН СССР, ФАО, т. 25, № 4, 1989, с.4221–4228.
17. Шмерлин Б.Я., Калашник М.В. Структура растущих периодических мод в модели влажной конвекции. – Изв. АН СССР, ФАО, т. 25, № 8, 1989, с.810–818.

Spontaneous growth of hurricane-like disturbances in the theory of convective instability for a moist saturated atmospheric layer

Abstract. *An analytical theory of the moist convective instability of the rotating thermally stratified viscous and heat-conducting atmospheric layer is created [12,13,16,17]. A conventional parameterization scheme of the heat source caused by the condensation latent heat release, similar CISC parameterization, is used. The theory may be taken as a generalization of the classical theory of the Rayleigh convective instability for a case of the water vapor phase transfers. The theory demonstrates the fundamental difference between the moist convective instability and the Rayleigh instability: it is shown, that the instability region on the plane of the problem parameters consists of two subregions, in the first one localized over the space “hurricane-like” structures have the largest growth rate, and only in the second one – periodic over the space structures. The theory developed describes a number of peculiarities in the dynamics of clouds, cloud streets and tropical cyclones. It destroys a conventional opinion, that CISC and similar parameterizations can not lead to the development of the localized structures of the tropical cyclones size.*

Keywords: *convective instability theory, moist convective instability, Rayleigh instability, conventional vortices, hurricane, tropical cyclone.*