

С.С. Зилигинкевич^{1,2,3,4}, проф., Т. Эльперин⁵, Н. Клиорин⁵, И. Рогачевский⁵

¹Отделение атмосферных наук и геофизики, Хельсинский Университет, Финляндия

²Финский метеорологический институт, Хельсинки, Финляндия

³Центр экологических исследований и дистанционного зондирования им. Ф. Нансена/
Центр исследований климата им. В. Бьеркнеса, Берген, Норвегия

⁴Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия

⁵Университет им. Бен-Гуриона в Негеве, Беер-Шева, Израиль

ЗАМЫКАНИЕ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

Аннотация. Предлагается модель замыкания уравнений Рейнольдса, основанная на уравнениях баланса для фундаментальных вторых моментов: ТКЭ (турбулентной кинетической энергии) и ТПЭ (турбулентной потенциальной энергии), вместе составляющих полную или суммарную энергию турбулентности: $СЭТ = ТКЭ + ТПЭ$, а также вертикальных турбулентных потоков импульса и плавучести (пропорциональной потенциальной температуре). Кроме понятия СЭТ, наш подход содержит ещё два новых ключевых элемента: неградиентную поправку к потоку плавучести и зависимость анизотропии поля скоростей от стратификации течения. В предложенной модели гарантирована возможность существования турбулентности при любом градиентном числе Ричардсона, Ri . Вместо критического значения числа Ричардсона, которое разделяет – как обычно предполагается – турбулентный и ламинарный режимы, в предлагаемой модели появляется переходный интервал, $0.1 < Ri < 1$, разделяющий два режима существенно различной природы: сильная турбулентность обычного типа при $Ri \ll 1$; и слабая турбулентность, способная переносить импульс, но намного менее эффективная в переносе тепла, при $Ri > 1$. Расчеты по нашей модели согласуются с данными атмосферных и лабораторных экспериментов, полного вихреразрешающего численного моделирования турбулентности (*direct numerical simulation* = DNS) и частично вихреразрешающего моделирования турбулентности (*large-eddy simulation* = LES).

Ключевые слова: анизотропия, замыкание уравнений турбулентного движения, кинетическая энергия турбулентности, потенциальная энергия турбулентности, полная энергия турбулентности, критическое число Ричардсона, путь смешения, устойчивая стратификация, турбулентная вязкость, турбулентный перенос.

1 Введение

Большинство используемых на практике моделей замыкания в теории турбулентного переноса основано на *градиентном приближении*. В соответствии с этим подходом турбулентные потоки импульса и скалярных величин представляются в виде произведений среднего градиента переносимой субстанции и соответствующего коэффициента турбулентного переноса (турбулентной вязкости, K_M , температуропроводности, K_H , или диффузии, K_D). Следуя Колмогорову [27], эти коэффициенты принимают пропорциональными турбулентной скорости, u_T , и турбулентному масштабу длины, l_T :

$$K_M \sim K_H \sim K_D \sim u_T l_T. \quad (1)$$

Обычно u_T^2 отождествляется с турбулентной кинетической энергией (ТКЭ), отнесенной к единице массы, E_K . Последняя рассчитывается из уравнения баланса ТКЭ с использованием Колмогоровского замыкания для скорости диссипации:

$$\varepsilon_K \sim E_K / t_T, \quad (2)$$

где $t_T \sim l_T / u_T$ – временной масштаб диссипации турбулентности.

Этот подход оправдан, при описании нейтрально стратифицированных течений, где l_T можно считать пропорциональным расстоянию от ближайшей стенки. Однако, он сталкивается с трудностями в стратифицированных потоках – как устойчивых, так и неустойчивых. Турбулентное число Прандтля, $Pr_T = K_M / K_H$, обнаруживает существенную зависимость от стратификации и не может рассматриваться как константа. Кроме того, как следует из уравнений баланса для вертикальных турбулентных потоков импульса и плавучести, турбулентным масштабом скорости u_T , служит $\sqrt{E_z}$ (где E_z – кинетическая энергия вертикальных пульсаций скорости). При нейтральной стратификации $E_z \sim E_K$, что и оправдывает традиционную оценку $u_T \sim \sqrt{E_K}$. Однако, при сильно устойчивой стратификации эта оценка перестает быть справедливой, т.к. коэффициент анизотропии, $A_z \equiv E_z / E_K$, убывает с усилением устойчивости.

Для учета стратификации приходится использовать разные масштабы длины для корреляторов «скорость–скорость», l_{TM} , и «скорость–температура», l_{TH} . В результате стандартная схема (сформулированная Колмогоровым для нейтральной стратификации и хорошо обоснованная только для этого случая) утрачивает свою конструктивность: нерешенная часть проблемы просто переносится от $\{K_M, K_H\}$ к $\{l_{TM}, l_{TH}\}$. При этом, уравнение баланса ТКЭ становится недостаточным для определения дополнительных неизвестных параметров.

В литературе можно найти многочисленные схемы замыкания, использующие уравнения баланса для различных параметров турбулентности (помимо ТКЭ) в сочетании с эвристическими гипотезами и эмпирическими формулами, однако консенсус не достигнут (см., например, обзоры [49,51]).

В данной статье исследуется влияние устойчивой стратификации плотности на турбулентные энергии и вертикальные турбулентные потоки в атмосферных (или океанских) течениях. Для простоты считается, что горизонтальные градиенты средней скорости и температуры значительно слабее вертикальных.

Предложенная теория даёт реалистичные зависимости от устойчивости для турбулентного числа Прандтля, вертикальной анизотропии и вертикального турбулентного масштаба длины. Изложение ведется в метеорологических терминах, но результаты легко могут быть переформулированы в терминах океанских течений. Для этого достаточно выразить плавучесть через температуру и соленость.

Мы рассматриваем уравнения баланса только для главных вторых моментов, а именно двух энергий (ТКЭ и ТПЭ) и вертикальных турбулентных потоков плавучести и количества движения. В этих уравнениях учитываются некоторые обычно отбрасываемые члены, но в то же время отложена на будущее параметризация турбулентных потоков третьего порядка и детальное изучение корреляций между скоростью и давлением. Для описания вертикальной анизотропии, A_z , используется обобщенная гипотеза изотропизации Ротта [44]. Существенно учитывается неградиентная поправка к традиционной формуле для турбулентного потока тепла. Такой подход позволяет получить сравнительно простую и в то же время реалистичную схему замыкания.

Мы рассматриваем суммарную (кинетическую+потенциальную) энергию турбулентности ($CЭТ$), получаем уравнение её баланса, и демонстрируем, что $CЭТ$ в устойчиво стратифицированных течениях со сдвигом скорости полностью не исчезает даже при самой сильной стратификации. Этот вывод, полученный из общих уравнений независимо от конкретного выражения для турбулентного масштаба длины, служит аргументом против широко используемой концепции критического градиентного числа Ричардсона в энергетическом смысле.

Напомним, что градиентное число Ричардсона, Ri , определяется как квадрат отношения частоты Вэйсяля–Брента, N , к сдвигу скорости, S :

$$Ri = \left(\frac{N}{S} \right)^2, \quad (3a)$$

$$S^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2, \quad (3b)$$

$$N^2 = \beta \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (3c)$$

где z – вертикальная координата, U и V – составляющие средней скорости вдоль горизонтальных осей x и y , θ – средняя потенциальная температура, $\beta = g/T_0$ – параметр плавучести, $g = 9.81 \text{ мс}^{-2}$ – ускорение свободного падения, и T_0 – стандартное значение абсолютной температуры.

Потенциальная температура определена как $\theta = T(P_0/P)^{1-1/\gamma}$, где T – абсолютная температура, P – давление, P_0 – стандартное значение давления, и $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.41$ – отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении (c_p) и постоянном объеме (c_v).

Число Ri характеризует влияние статической устойчивости на турбулентность. Принципиальный вопрос теории устойчиво стратифицированных течений, поставленный Ричардсоном [43] еще в начале прошлого века и оставшийся открытым до последнего времени: поддерживается ли стационарная турбулентность за счет сдвига скорости при очень больших градиентных числах Ричардсона и, если нет, каково критическое значение Ri , отделяющее турбулентные течения от ламинарных?

Широко распространено мнение, что при больших Ri турбулентность вырождается, причем для критического значения числа Ричардсона, Ri_c , часто используется оценка $Ri_c = 0.25$. Однако, существование Ri_c в энергетическом смысле не выведено из основных физических принципов и не подтверждено экспериментально. Более того, данные многочисленных экспериментов противоречат существованию Ri_c (см. детальное обсуждение этого вопроса в [53,54]).

Схема замыкания, основанная на прямом использовании уравнения баланса $TKЭ$ в сочетании с формулами (1) и (2) содержит Ri_c . Для практического моделирования это неприемлемо. Ламинаризация атмосферных течений практически никогда не происходит, а её появление в модели привело бы к нереалистическому прекращению

взаимодействия атмосферного потока с подстилающей поверхностью в каждом случае, когда Ri в приземном слое превышает Ri_c . Чтобы избежать появления Ri_c , схемы замыкания, начиная с широко известной работы Мэнора и Ямады [34], включают поправочные коэффициенты, определяющие безразмерные комбинации $K_M (u_T l_T)^{-1}$ и $K_H (u_T l_T)^{-1}$ как две различные универсальные функции от Ri . Во многих схемах они не выводятся, а либо определяются эмпирически, либо берутся из независимых теорий.

2 Уравнения Рейнольдса и уравнения баланса вторых моментов

Мы рассматриваем атмосферные течения, в которых изменения средней скорости ветра $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3) = (U, V, W)$ и потенциальной температуры θ (или виртуальной потенциальной температуры, включающей удельную влажность) в вертикальном направлении [вдоль оси x_3 (или z)] намного больше, чем по горизонтали [вдоль осей x_1, x_2 (или x, y)], так что членами, пропорциональными горизонтальным градиентам, в уравнениях баланса для турбулентных моментов можно пренебречь.

Мы также предполагаем, что вертикальный масштаб движений, ограниченный масштабами толщины атмосферы или глубины океана (в обоих случаях $\sim 10^4$ м), намного меньше их горизонтального масштаба, так что средняя вертикальная скорость намного меньше горизонтальной скорости. В этом случае, для замыкания уравнений Рейнольдса нужны только вертикальная составляющая, F_z , потока потенциальной температуры, F_i , и только две составляющие напряжений Рейнольдса, τ_{ij} , а именно те, которые описывают вертикальный поток количества движения: τ_{13} и τ_{23} .

Таким образом, среднее течение описывается уравнениями движения:

$$\frac{DU_1}{Dt} = f U_2 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{DU_2}{Dt} = -f U_1 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z}, \quad (5)$$

и термодинамическим уравнением энергии:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = -\frac{\partial F_z}{\partial z} + J, \quad (6)$$

где $D/Dt = \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$, $\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$, $F_i = \langle u_i \theta \rangle$, t – время, $f = 2\Omega \sin \varphi$ – параметр Кориолиса, Ω_i – вектор угловой скорости вращения Земли, параллельный полярной оси ($|\Omega_i| \equiv \Omega = 0.76 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$), φ – широта, ρ_0 – средняя плотность, J – скорость нагревания или охлаждения ($J = 0$ при адиабатических процессах), $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ и θ – пульсации скорости и потенциальной температуры. Угловые скобки означают осреднение по ансамблю [22, 26].

Уравнения баланса для ТКЭ, $E_K = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$, “энергии” флуктуаций потенциальной температуры, $E_\theta = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle$; потока потенциальной температуры, $F_i = \langle u_i \theta \rangle$ (с вертикальной составляющей $F_3 = F_z = \langle w \theta \rangle$) и напряжений Рейнольдса $\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$ (с компонентами $\tau_{i3} = \langle u_i w \rangle$ ($i=1,2$), описывающих вертикальный поток импульса), приведенные, например, в работах [1] и [8], имеют вид:

$$\frac{DE_K}{Dt} + \nabla \cdot \Phi_K = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \beta F_z - \varepsilon_K, \quad (7a)$$

или приближенно

$$\frac{DE_K}{Dt} + \frac{\partial \Phi_K}{\partial z} \approx -\tau_{i3} \frac{\partial U_i}{\partial z} + \beta F_z - \varepsilon_K, \quad (7b)$$

$$\frac{DE_\theta}{Dt} + \nabla \cdot \Phi_\theta = -F_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \varepsilon_\theta, \quad (8a)$$

или приближенно

$$\frac{DE_\theta}{Dt} + \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial z} = -F_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \varepsilon_\theta, \quad (8b)$$

$$\frac{DF_i}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{ij}^{(F)} = \beta_i \langle \theta^2 \rangle + \frac{1}{\rho_0} \langle \theta \nabla_i p \rangle - \tau_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \delta_{j3} - F_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon_i^{(F)}, \quad (9a)$$

включая нужное нам уравнение для $F_3 = F_z$:

$$\begin{aligned} \frac{DF_z}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \Phi_F &= \beta \langle \theta^2 \rangle + \frac{1}{\rho_0} \left\langle \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right\rangle - \langle w^2 \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \varepsilon_z^{(F)} \approx \\ &\approx C_\theta \beta \langle \theta^2 \rangle - \langle w^2 \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \varepsilon_z^{(F)}, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_{ij}^{(\tau)} = -\tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \left[\beta (F_j \delta_{i3} + F_i \delta_{j3}) + Q_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(\tau)} \right], \quad (10a)$$

включая нужные нам уравнения для τ_{i3} ($i=1,2$):

$$\frac{D\tau_{i3}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \Phi_i^{(\tau)} = -\langle w^2 \rangle \frac{\partial U_i}{\partial z} - \left[-\beta F_i - Q_{i3} + \varepsilon_{i3}^{(\tau)} \right] \approx -\langle w^2 \rangle \frac{\partial U_i}{\partial z} - \varepsilon_{i3}, \quad (10b)$$

где $\beta_i = \beta e_i$, e – вертикальный единичный вектор, $F_i = \langle u_i \theta \rangle$ ($i=1,2$) – горизонтальные потоки потенциальной температуры, $-\tau_{ij} \partial U_i / \partial x_j$ – скорость генерации ТКЭ, δ_{ij} – единичный тензор ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

В уравнениях (7) – (10) использованы следующие обозначения: Φ_K , Φ_θ и Φ_F - статистические моменты третьего порядка, описывающие турбулентный перенос ТКЭ и “энергии” флуктуаций потенциальной температуры:

$$\Phi_K = \frac{1}{\rho_0} \langle p \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle u^2 \mathbf{u} \rangle, \text{ так что } \Phi_K = \frac{1}{\rho_0} \langle p w \rangle + \frac{1}{2} \langle u^2 w \rangle, \quad (11a)$$

$$\Phi_\theta = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \mathbf{u} \rangle, \text{ так что } \Phi_\theta = \frac{1}{2} \langle \theta^2 w \rangle, \quad (11b)$$

и турбулентные потоки потенциальной температуры и количества движения:

$$\Phi_{ij}^{(F)} = \frac{1}{2\rho_0} \langle p \theta \rangle \delta_{ij} + \langle u_i u_j \theta \rangle, \quad \Phi_{33}^{(F)} = \Phi_F = \frac{1}{2\rho_0} \langle p \theta \rangle + \langle w^2 \theta \rangle, \quad (12)$$

$$\Phi_{ijk}^{(\tau)} = \langle u_i u_j u_k \rangle + \frac{1}{\rho_0} (\langle p u_i \rangle \delta_{jk} + \langle p u_j \rangle \delta_{ik}), \quad (13a)$$

$$\Phi_{i33}^{(\tau)} = \Phi_i^{(\tau)} = \langle u_i w^2 \rangle + \frac{1}{\rho_0} \langle p u_i \rangle, \quad (i = 1, 2); \quad (13b)$$

Q_{ij} – корреляции между пульсациями давления, p , и сдвигами скорости:

$$Q_{ij} = \frac{1}{\rho_0} \left\langle p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle; \quad (14)$$

ε_K , $\varepsilon_{ij}^{(\tau)}$, ε_θ и $\varepsilon_i^{(F)}$ – операторы, описывающие молекулярные механизмы:

$$\varepsilon_K = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \varepsilon_{ij}^{(\tau)} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle, \quad (15a)$$

$$\varepsilon_\theta = -\kappa \langle \theta \Delta \theta \rangle, \quad \varepsilon_i^{(F)} = -\kappa (\langle u_i \Delta \theta \rangle + \text{Pr} \langle \theta \Delta u_i \rangle), \quad (15b)$$

где ν – кинематическая вязкость, κ – температуропроводность, и $\text{Pr} = \nu/\kappa$ - молекулярное число Прандтля.

Величины, ε_K , $\varepsilon_{ii}^{(\tau)}$ (т.е. диагональные элементы $\varepsilon_{11}^{(\tau)}$, $\varepsilon_{22}^{(\tau)}$, $\varepsilon_{33}^{(\tau)}$), ε_θ и $\varepsilon_i^{(F)}$ положительны и представляют собой скорости диссипации величин E_K , τ_{ii} , E_θ и $F_i^{(F)}$. Согласно [27], они принимаются пропорциональными отношению рассматриваемого статистического момента к диссипативному масштабу времени, t_T :

$$\varepsilon_K = \frac{E_K}{C_K t_T}, \quad \varepsilon_{ii}^{(\tau)} = \frac{\tau_{ii}}{C_K t_T}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{E_\theta}{C_P t_T}, \quad \varepsilon_i^{(F)} = \frac{F_i}{C_F t_T}, \quad (16)$$

где C_K , C_P и C_F - безразмерные константы.

Физические механизмы затухания недиагональных компонент напряжений Рейнольдса, τ_{ij} ($i \neq j$), не сводятся к молекулярной диссипации. Члены

$\varepsilon_{ij}^{(\tau)} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle$ в уравнении (10b) сравнительно малы и не обязательно

положительны, а главную диссипативную роль выполняют члены, описывающие корреляции между флуктуациями давления и сдвига скорости, а также горизонтальные турбулентные потоки потенциальной температуры. Оставляя для отдельной работы более детальный анализ баланса τ_{i3} , мы объединяем все эти члены и вводим для напряжений Рейнольдса “эффективную скорость диссипации”:

$$\varepsilon_{i3(\text{eff})} \equiv \varepsilon_{i3}^{(\tau)} - \beta F_i - Q_{i3} + (\text{неучтенные факторы}) \quad (i=1,2) \quad (17)$$

и применяем к ней гипотезу замыкания Колмогорова: $\varepsilon_{i3(\text{eff})} \sim \tau_{i3} / t_\tau$, где t_τ - масштаб времени эффективной диссипации [член $\varepsilon_{i3}^{(\tau)}$ оценивается как $\varepsilon_{i3}^{(\tau)} \sim O(Re^{-1/2})$, и на этом основании может быть отброшен]. С учетом различия между t_τ и обычным временным масштабом диссипации, t_T [формулы (16)], эффективные скорости диссипации определяются по формуле:

$$\varepsilon_{i3(\text{eff})} = \frac{\tau_{i3}}{\Psi_\tau t_T}, \quad (18)$$

где $\Psi_\tau = t_z / t_T$ - эмпирический безразмерный коэффициент. Из общих соображений следует, что Ψ_τ может быть лишь монотонной функцией статической устойчивости, не обращающейся ни в нуль, ни в бесконечность.

В дальнейшем анализе мы используем приближенную версию уравнения (9b). Как показано в Приложении А, второй член в правой части в “точной” версии (9b), а именно $\rho_0^{-1} \langle \theta \partial p / \partial z \rangle$, существенно отрицателен и пропорционален $\beta \langle \theta^2 \rangle$. На этом основании, сумма $\beta \langle \theta^2 \rangle + \rho_0^{-1} \langle \theta \partial p / \partial z \rangle$ заменяется на $C_\theta \beta \langle \theta^2 \rangle$, где $C_\theta < 1$ - эмпирическая безразмерная константа.

3 Кинетическая и потенциальная турбулентные энергии

Используя уравнения состояния и гидростатики, плотность и плавучесть в атмосфере можно выразить через потенциальную температуру, θ , и удельную влажность, q (в океане, через θ и соленость, s). Эти переменные являются адиабатическими инвариантами и поэтому остаются постоянными в вертикально перемещающихся объемах жидкости или газа. Таким образом, и плотность также оказывается адиабатическим инвариантом. Это позволяет рассчитать ее флуктуацию: $\rho' = (\partial \rho / \partial z) \delta z$, а следовательно, и флуктуацию потенциальной энергии, отнесенной к единице массы:

$$\delta E_P = \frac{g}{\rho_0} \int_z^{z+\delta z} \rho' dz = \frac{1}{2} \frac{b'^2}{N^2}. \quad (19)$$

Для определенности, мы рассматриваем термически стратифицированную атмосферу, в которой плавучесть, b , однозначно выражается через потенциальную температуру: $b = \beta \theta$. Тогда, в силу формулы (19), турбулентная потенциальная энергия (ТПЭ) пропорциональна «энергии» флуктуаций потенциальной температуры:

$$E_P = \left(\frac{\beta}{N}\right)^2 E_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{N}\right)^2 \langle \theta^2 \rangle. \quad (20)$$

Умножая уравнение (8b) на $(\beta/N)^2 = (\partial\Theta/\partial z)^{-1}$ и предполагая, что N меняется медленно по сравнению с изменениями E_P , мы сразу получаем следующее уравнение баланса ТПЭ:

$$\frac{DE_P}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \Phi_P = -\beta F_z - \varepsilon_P = -\beta F_z - \frac{E_P}{C_P t_T}, \quad (21)$$

где $\Phi_P = (\beta/N)^2 \Phi_\theta$ и $\varepsilon_P = (\beta/N)^2 \varepsilon_\theta$. Член βF_z присутствует в уравнениях (7b) и (21) с противоположными знаками и описывает обмен энергии между ТКЭ и ТПЭ.

Сумма ТКЭ и ТПЭ представляет собой ни что иное, как *полную или суммарную энергию турбулентности (СЭТ)*:

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2} \left(\langle \mathbf{u}^2 \rangle + \left(\frac{\beta}{N}\right)^2 \langle \theta^2 \rangle \right). \quad (22)$$

Уравнение баланса СЭТ получается просто путем почленного сложения уравнений (7b) и (21). Константы, C_K и C_P в уравнениях (16), характеризующие скорости диссипации кинетической и потенциальной энергий, вообще говоря, могут отличаться [53, 54]. В случае, если $C_K = C_P$, уравнение баланса СЭТ принимает особенно простой вид:

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \Phi_T = -\tau_{i3} \frac{\partial U_i}{\partial z} - \frac{E}{C_K t_T}, \quad (23)$$

где $\Phi_T = \Phi_K + \Phi_P$ – дивергенция турбулентного потока СЭТ.

В равновесном режиме уравнение (23) означает баланс между продукцией СЭТ = τS (где $\tau^2 = \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2$) и диссипацией СЭТ $\sim Et_T^{-1}$, из которого следует простая формула $E \sim \tau S t_T$. В разделе 5 мы покажем, что при очень больших Ri отношения τ/E , E_K/E и E_z/E_K стремятся к ненулевым константам. Отсюда следуют оценка диссипативного масштаба времени $t_T \sim l_z E_z^{-1/2} \sim l_z E^{-1/2}$ и оценка предельного значения TTE при очень больших значениях Ri : $E \sim (l_z S)^2 > 0$. Этот вывод означает,

что $CЭТ$ может подерживаться при любых Ri , и не оставляет места для критического числа Ричардсона в энергетическом смысле.

Традиционный анализ энергетики турбулентности был в основном ограничен балансом $ТКЭ$, т.е. уравнением (7b). Хорошо известное уравнение (8b) для квадрата флуктуаций потенциальной температуры в оперативных схемах замыкания не использовалось, хотя связь между E_θ и E_p рассматривалась во многих работах [6,7,8,11,18,19,21,23,25,29,41,45,47,48]. В контексте турбулентного замыкания, Зилитинкевич С.С. [56] использовал уравнения баланса для баланса обеих энергий – $ТКЭ$ и $ТПЭ$, чтобы получить энергетически согласованное замыкание без использования традиционной гипотезы $K_H \sim K_M \sim E_K t_T$ (необоснованной при сильно устойчивой стратификации). Все три уравнения баланса – для $ТКЭ$, $ТПЭ$ и $СЭТ$ рассматривались в [6,13,32,52].

4 Локальная модель замыкания для стационарной однородной турбулентности

4.1 Кинетическая энергия вертикальных пульсаций скорости

В этом разделе мы рассматриваем стационарный, горизонтально однородный и равновесный режим турбулентности, при котором пренебрегают дивергенцией третьих моментов, и левые части во всех уравнениях баланса обращаются в нуль; кроме того, ограничиваемся типичными геофизическими течениями, в которых горизонтальные градиенты средней скорости и средней температуры пренебрежимо малы по сравнению с вертикальными градиентами. При этих условиях скорость продукции $ТКЭ$ пропорциональна вертикальному сдвигу средней скорости

$$\Pi = -\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \tau S, \quad (24)$$

где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, 0)$, и $\tau \equiv |\boldsymbol{\tau}|$.

Разумеется, в других видах турбулентных течений Π определяется более сложным образом. Так, в волновом пограничном слое под поверхностью океана или в слое инверсии над атмосферным пограничным слоем, дополнительным источником $ТКЭ$ служит разрушение поверхностных волн в воде или внутренних гравитационных волн в атмосфере. Эти механизмы больше похожи на генерацию турбулентности осциллирующей решеткой, чем на сдвиговую генерацию.

При $C_p = C_K$ (см. обсуждение уравнения (23) в разделе 3), уравнения (19) – (23) приводят к следующим выражениям для турбулентных энергий:

$$E = C_K t_T \Pi, \quad (25a)$$

$$E_p = -C_K t_T \beta F_z = E Ri_f, \quad (25b)$$

$$E_K = C_K t_T (\Pi + \beta F_z) \equiv C_K t_T \Pi (1 - Ri_f) = E (1 - Ri_f), \quad (25c)$$

где Ri_f – "турбулентное число Ричардсона" (*flux Richardson number*), определяемое как отношение затрат $ТКЭ$ на преодоление сил плавучести к продукции $ТКЭ$ за счет сдвига скорости:

$$\text{Ri}_f \equiv -\frac{\beta F_z}{\Pi} = \frac{\text{Ri}}{\text{Pr}_T} = \frac{E_P}{E}. \quad (26)$$

В рамках приведенного выше анализа, это число представляет собой отношение ТПЭ к СЭТ 1. Оно равно нулю при нейтральной стратификации, монотонно возрастает с увеличением устойчивости, но не может превышать единицу. Следовательно, при предельной устойчивости (при $\text{Ri} \rightarrow \infty$) Ri_f должно стремиться к ненулевому положительному пределу, Ri_f^∞ .

Этот вывод никоим образом не поддерживает идею критического градиентного числа Ричардсона. В самом деле, Ri_f – внутренний параметр турбулентности, в противоположность градиентному числу Ричардсона $\text{Ri} = (\beta \partial \Theta / \partial z) / (\partial U / \partial z)^2$, которое характеризует средний поток и по отношению к турбулентности служит внешним параметром.

Ключевой характеристикой вертикального турбулентного переноса служит кинетическая энергия вертикальных флуктуаций скорости: $E_z = \frac{1}{2} \langle w^2 \rangle$. Для её определения необходимо рассмотреть уравнения баланса (10а) для всех трех диагональных напряжений Рейнольдса: $\tau_{11} = 2E_1 = 2E_x = \langle u^2 \rangle$, $\tau_{22} = 2E_2 = 2E_y = \langle v^2 \rangle$ и $\tau_{33} = 2E_3 = 2E_z = \langle w^2 \rangle$. В равновесном режиме они принимают вид:

$$\frac{E_i}{C_K t_T} = -\tau_{i3} \frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{1}{2} Q_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad (27a)$$

$$\frac{E_z}{C_K t_T} = \frac{E_3}{C_K t_T} = \beta F_z + \frac{1}{2} Q_{33}. \quad (27b)$$

Сумма членов, выражающих корреляции между давлением и градиентами скорости, $\sum Q_{ii} = \sum \rho_0^{-1} \langle p \partial u_i / \partial x_i \rangle$, равна нулю вследствие уравнения неразрывности: $\sum \partial u_i / \partial x_i = 0$. Следовательно, эти члены не являются ни продукционными, ни диссипативными, а описывают переходы энергии от “богатых” компонент к “бедным”. Для их определения мы предлагаем обобщенный вариант гипотезы Рота [44]:

$$Q_{11} = -\frac{2C_r}{3C_K t_T} (3E_1 - E_K \Psi_1), \quad (28a)$$

$$Q_{22} = -\frac{2C_r}{3C_K t_T} (3E_2 - E_K \Psi_2), \quad (28b)$$

¹ Если $C_P \neq C_K$, то Ri_f не равно, а пропорционально E_P/E (см. Zilitinkevich et al., 2008).

$$Q_{33} = -\frac{2C_r}{3C_K t_T} (3E_3 - E_K \Psi_3). \quad (28c)$$

где C_r и Ψ_i ($i=1,2,3$) безразмерные эмпирические коэффициенты.

Коэффициент C_r введен для учета различия между временными масштабами вязкой диссипации и ослабления турбулентности силами плавучести. В качестве первого приближения, мы принимаем эти два масштаба времени пропорциональными: $t_r \sim t_T$, так что $C_r = t_r/t_T = const$. Коэффициенты Ψ_i определяют перераспределение $TKЭ$ между компонентами скорости. При $\Psi_i = 1$ формулы (28) сводятся к обычной гипотезе Рота, известной как хорошее приближение для нейтрально стратифицированных течений. Оставляя возможность для более тонкого учета эффектов стратификации, мы обобщаем эту гипотезу, полагая

$$\Psi_i = 1 + C_i Ri_f, \quad i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

где Ri_f – турбулентное число Ричардсона [формула (26)], C_i – эмпирические константы.

Их сумма должна обращаться в нуль ($C_1 + C_2 + C_3 = 0$), чтобы удовлетворить условию $\sum Q_{ii} = 0$ (т.е. условию $E_K = E_1 + E_2 + E_3$). Линейная зависимость от Ri_f в правой части формул (29) обеспечивает необходимые по физическому смыслу пределы: $\Psi_i = 1$ при $Ri = 0$, и $\Psi_i \rightarrow 1 + C_i Ri_f^\infty$ при $Ri \rightarrow \infty$.

Поскольку энергетический обмен между горизонтальными составляющими $TKЭ$, E_1 и E_2 , непосредственно не зависит от стратификации, мы принимаем первые две константы энергетического обмена равными: $C_1 = C_2$. С учетом упомянутого выше условия $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, отсюда следует, что только одна из трех констант независима:

$C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}C_3$. Формулы (27) – (28) дают

$$E_i = \frac{C_r}{3(1+C_r)} E_K \Psi_i - \frac{C_K}{1+C_r} t_T \tau_{i3} \frac{\partial U_i}{\partial z}, \quad i = 1, 2 \quad (30a)$$

$$E_z = \frac{C_r}{3(1+C_r)} E_K \Psi_3 + \frac{C_K}{1+C_r} t_T \beta F_z. \quad (30b)$$

В плоско-параллельном нейтрально стратифицированном течении, где $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$ формулы (30a) и (30b) принимают вид:

$$\frac{E_x}{E_K} = \frac{3 + C_r}{3(1 + C_r)}, \quad (31a)$$

$$\frac{E_y}{E_K} = \frac{E_z}{E_K} = \frac{C_r}{3(1 + C_r)}. \quad (31b)$$

Учитывая различия между кинетическими энергиями различных компонент скорости, выражаем временной масштаб диссипации, $t_T = l_T E_K^{-1/2}$, через вертикальный турбулентный масштаб длины l_z :

$$t_T = \frac{l_z}{E_z^{1/2}}. \quad (32)$$

Подставляя эту формулу для t_T в формулы (25с) и (30b) и используя формулу (29), окончательно получаем

$$E_z = \left[\frac{C_K C_r \Psi_3}{3(1+C_r)} \left(\Pi + \left(\frac{3}{C_r \Psi_3} + 1 \right) \beta F_z \right) l_z \right]^{2/3}, \quad (33a)$$

$$\Psi_3 = 1 + C_3 \text{Ri}_f. \quad (33b)$$

При $C_3 = 0$ это выражение сводится к решению Рота.

Чтобы замкнуть систему уравнений Рейнольдса в "геофизическом приближении", горизонтальные компоненты кинетической энергии, E_x и E_y , не требуются. Мы оставляем их обсуждение для отдельной статьи.

4.2 Вертикальные турбулентные потоки импульса и потенциальной температуры

Как уже говорилось, из недиагональных составляющих напряжений Рейнольдса нас интересуют лишь $\tau_{13} = \tau_{xz} = \langle uw \rangle$ и $\tau_{23} = \tau_{yz} = \langle vw \rangle$, определенные уравнением (10b) и необходимые для замыкания уравнений движения (4) и (5). В равновесном режиме, в силу формул (17)–(18) для эффективной скорости диссипации, они принимают вид:

$$\tau_{i3} = -2\Psi_\tau E_z^{1/2} l_z \frac{\partial U_i}{\partial z}, \quad i=1,2. \quad (34)$$

Из трех составляющих потока потенциальной температуры, мы рассматриваем лишь вертикальный поток $F_3 = F_z$, определяемый уравнением (9b), необходимый для замыкания уравнения переноса тепла (6). Подставляя $\beta E_\theta = (N^2 / \beta) E_P = -C_K N^2 l_z F_z / E_z^{1/2}$ [согласно формулам (25b) и (32)], в равновесный вариант уравнения (9b), получаем

$$F_z = - \frac{2C_F E_z^{1/2} l_z}{1 + 2C_\theta C_F C_K (N l_z)^2 E_z^{-1}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \quad (35)$$

Поскольку $N^2 = \beta \partial \theta / \partial z$, F_z зависит от $\partial \theta / \partial z$ слабее, чем по линейному закону и при $\partial \theta / \partial z \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу, не зависящему от $\partial \theta / \partial z$:

$$F_{z,\max} = -\frac{E_z^{3/2}}{C_\theta C_K \beta l_z} = -\frac{\varepsilon_{kz}}{C_\theta \beta}, \quad (36)$$

где ε_{kz} – скорость диссипации кинетической энергии вертикальных флуктуаций скорости.

Отсюда ясно следует, что F_z никак не может рассматриваться как заданный внешний параметр турбулентного потока. Поэтому, как уже подчеркивалось в разделе 4.1, турбулентное число Ричардсона $Ri_f = -\beta F_z (\tau S)^{-1}$ является внутренним параметром турбулентности и не может задаваться произвольно. Формула, аналогичная (36), была выведена в [8].

Уравнения (34) и (35) позволяют определить коэффициенты турбулентной вязкости и температуропроводности:

$$K_M \equiv \frac{-\tau_i z}{\partial U_i / \partial z} = 2\Psi_\tau E_z^{1/2} l_z, \quad (37a)$$

$$K_H \equiv \frac{-F_z}{\partial \Theta / \partial z} = \frac{2C_F E_z^{1/2} l_z}{1 + 2C_\theta C_F C_K (N l_z)^2 E_z^{-1}}. \quad (37b)$$

Таким образом, наши формулы (17)–(18) для эффективной диссипации напряжений Рейнольдса приводят к формуле для турбулентной вязкости (37a), аналогичной традиционной формуле (1), тогда как уравнение (37b) для турбулентной температуропроводности содержит противогradientную поправку и принципиально отличается от традиционного.

В данной статье формула (37a) выведена с помощью гипотетического понятия эффективной скорости диссипации. Более строго она выводится из уравнений баланса для напряжений Рейнольдса в k -пространстве с использованием “ τ -приближения” [13,14].

Напомним, что Ψ_τ – безразмерный, ограниченный коэффициент, монотонно зависящий от статической устойчивости [см. формулы (17)–(18) и их обсуждение в разделе 2]. Мы аппроксимируем эту зависимость линейной функцией:

$$\Psi_\tau = C_{\tau 1} + C_{\tau 2} Ri_f, \quad (38)$$

где $C_{\tau 1}$ и $C_{\tau 2}$ – безразмерные константы, подлежащие эмпирическому определению. Формула (38) обеспечивает ненулевые пределы: $\Psi_\tau = C_{\tau 1}$ при $Ri = 0$, и $\Psi_\tau \rightarrow C_{\tau 1} + C_{\tau 2} Ri_f^\infty$ при $Ri \rightarrow \infty$.

4.3 Турбулентное число Прандтля и другие безразмерные параметры

Система алгебраических уравнений (33)–(35) обладает “частичной инвариантностью” относительно l_z и позволяет определить турбулентное число Прандтля, Ri_T , турбулентное число Ричардсона, Ri_f , и другие безразмерные характеристики турбулентности как универсальные функции градиентного числа

Ричардсона, Ri . Разумеется, такая универсальность имеет место только в однородном, стационарном режиме, когда поступление турбулентности полностью определяется её локальной продукцией. В неоднородных режимах вступают в действие другие механизмы, в первую очередь, переносы $TKЭ$ и $ТПЭ$ в пространстве, так что Ri уже не является единственным определяющим параметром.

Так как $\Pi = K_M S^2$ и $Ri_f \equiv -\beta F_z / \Pi$, из формул (33) и (37) следует

$$\frac{E_z}{(Sl_z)^2} = \Psi(Ri_f) \equiv \frac{2C_K C_r \Psi_3 \Psi_\tau}{3(1+C_r)} \left[1 - \left(\frac{3}{C_r \Psi_3} + 1 \right) Ri_f \right], \quad (39)$$

где Ψ_3 и Ψ_τ – линейные функции от Ri_f заданные формулами (33b) и (38). Далее, поделив K_M [формула (37b)] на K_H [формула (38)], и подставив E_z по формуле (39), получаем:

$$Pr_T \equiv \frac{K_M}{K_H} = \frac{Ri}{Ri_f} = \frac{\Psi_\tau}{C_F} + \frac{3(1+C_r)C_\theta}{C_r \Psi_3} Ri \left[1 - \left(\frac{3}{C_r \Psi_3} + 1 \right) Ri_f \right]^{-1}, \quad (40)$$

и

$$\frac{1}{Ri} = \frac{C_F \Psi_\tau^{-1}}{Ri_f} - \frac{3C_F(1+C_r)C_\theta \Psi_\tau^{-1}}{C_r \Psi_3(1-Ri_f) - 3Ri_f}, \quad (41)$$

Формулы (40) и (41) [а также выведенные на их основе последующие соотношения (46)–(48)] не содержат вертикального масштаба длины l_z . Это совершенно нетривиальное свойство нашей теории позволяет разделить трудности и выделить наиболее дискуссионный аспект проблемы замыкания, а именно определение l_z , в отдельное рассмотрение.

Формула (41) вместе с (33b) и (38) задает Ri как универсальную монотонно возрастающую функцию от Ri_f , определенную в интервале $0 < Ri_f \ll Ri_f^\infty$, (где Ri_f^∞ определено приведенной ниже формулой (45)). Таким образом, обратная зависимость

$$Ri_f = \Phi(Ri) \quad (42)$$

представляет собой однозначную монотонно возрастающую функцию, меняющуюся от 0 при $Ri = 0$ до $Ri_f \rightarrow \infty$ при $Ri \rightarrow \infty$ и обладающую следующими асимптотическими свойствами:

$$Pr_T \approx \frac{\Psi_\tau^{(0)}}{C_F} + \left(\frac{3C_\theta(1+C_r)}{C_r} + \frac{C_\tau 2}{C_F} \right) Ri \rightarrow Pr_T^{(0)} = \frac{\Psi_\tau^{(0)}}{C_F}, \quad (43a)$$

$$Ri_f \approx \frac{C_F}{\Psi_\tau^{(0)}} Ri \quad \text{при} \quad Ri \ll 1, \quad (43b)$$

$$\text{Pr}_T \approx \frac{1}{\text{Ri}_f^\infty} \text{Ri}, \quad (44a)$$

$$\text{Ri}_f \rightarrow \text{Ri}_f^\infty \text{ при } \text{Ri} \gg 1, \quad (44b)$$

где

$$\text{Ri}_f^\infty = \frac{C_r \Psi_3^\infty}{C_r \Psi_3^\infty + 3[1 + C_\theta(1 + C_r)]}. \quad (45)$$

Верхние индексы “(0)” и “∞” означают соответственно “при $\text{Ri} = 0$ ” и “при $\text{Ri} \rightarrow \infty$ ”.

Формулы (33) – (35) позволяют определить, кроме Pr_T , ряд других безразмерных параметров, в частности, вертикальную анизотропию:

$$A_z \equiv \frac{E_z}{E_K} = \frac{C_r \Psi_3}{3(1 + C_r)} \left[1 - \left(\frac{3}{C_r \Psi_3} + 1 \right) \text{Ri}_f \right] (1 - \text{Ri}_f)^{-1}, \quad (46)$$

отношение абсолютного значения турбулентного потока импульса к $TKЭ$, характеризующее корреляцию между вертикальными и горизонтальными флуктуациями скорости:

$$\left(\frac{\tau}{E_K} \right)^2 = \frac{2\Psi_\tau A_z}{C_K(1 - \text{Ri}_f)}, \quad (47)$$

и отношение квадрата вертикального потока потенциальной температуры к произведению $TKЭ$ и “энергии” температурных флуктуаций:

$$\frac{F_z^2}{E_K E_\theta} = \frac{2\Psi_\tau A_z}{C_K \text{Pr}_T}. \quad (48)$$

Формулы (46) – (48) в комбинации с (41) определяют зависимости A_z , $\tau^2 E_K^{-2}$ и $F_z^2 (E_K E_\theta)^{-2}$ от Ri со следующими асимптотическими пределами:

$$A_z \rightarrow A_z^{(0)} = \frac{C_r}{3(1 + C_r)}, \quad (49a)$$

$$\left(\frac{\tau}{E_K} \right)^2 \rightarrow \frac{2\Psi_\tau^{(0)} A_z^{(0)}}{C_K} \quad (49b)$$

$$\frac{F_z^2}{E_K E_\theta} \rightarrow \frac{2C_F A_z^{(0)}}{C_K} \text{ при } \text{Ri} \ll 1 \quad (49c)$$

$$A_z \rightarrow A_z^\infty = \frac{C_r \Psi_3^\infty}{3(1+C_r)} \left[1 - \left(\frac{3}{C_r \Psi_3^\infty} + 1 \right) \text{Ri}_f^\infty \right] (1 - \text{Ri}_f^\infty)^{-1}, \quad (50a)$$

$$\left(\frac{\tau}{E_K} \right)^2 \rightarrow \frac{2\Psi_\tau^\infty A_z^\infty}{C_K (1 - \text{Ri}_f^\infty)}, \quad (50b)$$

$$\frac{F_z^2}{E_K E_\theta} \rightarrow \frac{2\Psi_\tau^\infty A_z^\infty}{C_K \text{Pr}_T^\infty} \text{ при } \text{Ri} \gg 1. \quad (50c)$$

Напомним, что турбулентным масштабом скорости в формулах (34) – (37) служит $\sqrt{E_z}$. В большинстве моделей замыкания зависимость $A_z = E_z / E_K$ от устойчивости не учитывается, а вместо $\sqrt{E_z}$ используется $\sqrt{E_K}$. При сильной устойчивости это может приводить к существенным ошибкам, особенно в расчетах турбулентной диффузии загрязняющих примесей. Формула (46), подкреплённая экспериментальными данными (см. [32] и анализ данных в разделе б) позволяет избежать этих ошибок.

4.4 Вертикальный турбулентный масштаб длины

В устойчиво стратифицированных геофизических течениях вертикальный размер турбулентных вихрей, генерируемых сдвигом скорости на данной высоте, ограничен двумя главными факторами: расстоянием до подстилающей поверхности и устойчивостью стратификации. Для её характеристики используются следующие масштабы длины:

$$L = \frac{\tau^{3/2}}{-\beta F_z} = \frac{\tau^{1/2}}{S \text{Ri}_f}, \quad (51)$$

$$L_O = \varepsilon_k^{1/2} N^{-3/2}, \quad (52)$$

$$L_N = E_z^{1/2} N^{-1}, \quad (53)$$

$$L_S = E_z^{1/2} S^{-1}, \quad (54)$$

где: L – масштаб Монина-Обухова (1954), L_O – масштаб Озмидова [39], L_S – масштаб, обусловленный сдвигом скорости [20,21] и L_N – масштаб, обусловленный стратификацией плотности (см. например, таблицу 3 в [10]).

Во вращающихся жидкости или газе непосредственное влияние угловой скорости вращения Ω на размеры турбулентных вихрей ограничено масштабом $E_z^{1/2} \Omega$. В устойчиво стратифицированных атмосферных и океанских течениях этот ограничитель играет второстепенную роль. В настоящей работе мы его не рассматриваем и ограничиваемся обсуждением влияния стратификации.

В рамках нашей локальной модели масштабы (52) – (54) пропорциональны L с точностью до коэффициентов, зависящих только от Ri .

Поэтому общее выражение для l_z , учитывающее ограничения $l_z < z$ и $l_z < \{L, L_O, L_S, L_N\}$, можно искать в виде $l_z^{-1} \sim z^{-1} + L^{-1}\Phi_l(Ri)$, где Φ_l – функция от Ri , подлежащая эмпирическому определению. В локальной модели, поскольку безразмерная высота z/L является универсальной функцией от Ri , общее выражение для l_z может быть записано в виде $l_z = z\Psi_l(Ri)$. Функция $\Psi_l(Ri)$ должна удовлетворять следующим физическим требованиям: при нейтральной стратификации достигать максимального значения $\Psi_l(0) = 1$, а при возрастании Ri_f убывать и стремиться к нулю при $Ri_f \rightarrow Ri_f^\infty$ [иначе, формула (33) даст $E_z > 0$ при $Ri_f \rightarrow Ri_f^\infty$, что физически бессмысленно].

Одной из возможных аппроксимаций может служить формула [54]:

$$l_z = z \left(1 - \frac{Ri_f}{Ri_f^\infty} \right)^{4/3}, \quad (55)$$

где показатель степени $4/3$ определён эмпирически по данным численного моделирования LES DATABASE46 [4,16,] и полевого эксперимента SHEBA [50].

Напомним, что результаты анализа, изложенного в предшествующих разделах этой статьи, не зависят от конкретного выражения для l_z . Раздел 4.4 помещен здесь для полноты изложения.

5 Калибрация локальной модели

Чтобы определить эмпирические безразмерные константы $C_r, C_K, C_F, C_\theta, C_{\tau 1}, C_{\tau 2}, C_3$ и показатель степени в формуле (55), мы сравниваем результаты, полученные в разделе 4, с экспериментальными данными и результатами полного (DNS) и частичного вихреразрешающего (LES) моделирования турбулентности.

Напомним, что локальная модель выведена в приближении однородной турбулентности и не предусматривает переноса турбулентных энергий или турбулентных потоков турбулентностью. Практически все доступные данные представляют вертикально (а в ряде случаев, и горизонтально) неоднородные течения, в которых переносы вторых моментов в той или иной степени присутствуют. Это означает, что безразмерные параметры турбулентности, такие как $Pr_T, Ri_f, (\tau/E_K)^2, F_z^2/(E_K E_\theta)$ и A_z , не обязаны быть универсальными функциями от Ri . Так или иначе, но в недавних работах [33,52] получены эмпирические зависимости перечисленных выше параметров от Ri , в целом подтверждающие теорию. Ниже приводятся результаты дальнейшего анализа данных.

На рис. 1а и 1б представлены зависимости турбулентного числа Прандтля Pr_T и турбулентного числа Ричардсона $Ri_f = Ri/Pr_T$ от градиентного числа Ричардсона Ri по данными атмосферных и лабораторных экспериментов, LES и DNS [5,28,38,42,46,47,53].

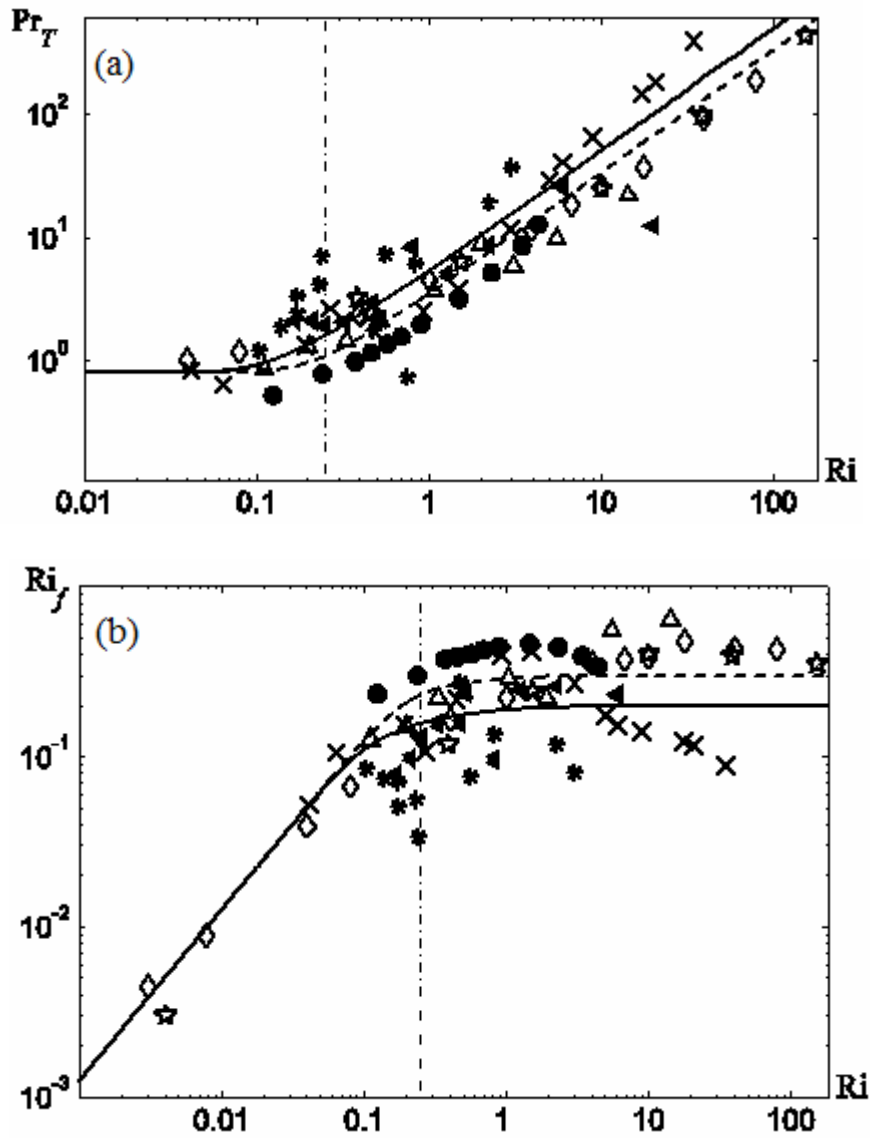


Рис. 1 – Турбулентные числа (а) Прандтля $Pr_T = \frac{K_M}{K_H}$ и (б) Ричардсона $Ri_f = Ri/Pr_T$

как функции градиентного числа Ричардсона $Ri = \left(\frac{N}{S}\right)^2$. Данные представлены следующими символами: атмосферные измерения – наклонные черные треугольники [28] и "снежинки" [5]; лабораторные эксперименты – черные кружки [46], наклонные крестики [42] и ромбы [38]; LES – прямые треугольники [53]; DNS - звездочки [47]. Теоретические кривые представляют расчеты по локальной модели для двух предельных значений турбулентного числа Ричардсона: $Ri_f^\infty = 0.2$ – сплошная линия и $Ri_f^\infty = 0.4$ – пунктирная линия.

Данные, относящиеся к малым значениям Ri , согласуются с общепринятой эмпирической оценкой $Pr_T^{(0)} \equiv Pr_T|_{Ri \rightarrow 0} = 0.8$ (см. обзорные статьи [9,17] и теоретическую работу [12]). Рисунок 1b ясно показывает, что Ri_f при больших Ri выходит на постоянное значение $Ri_f^\infty \approx 0,2$.

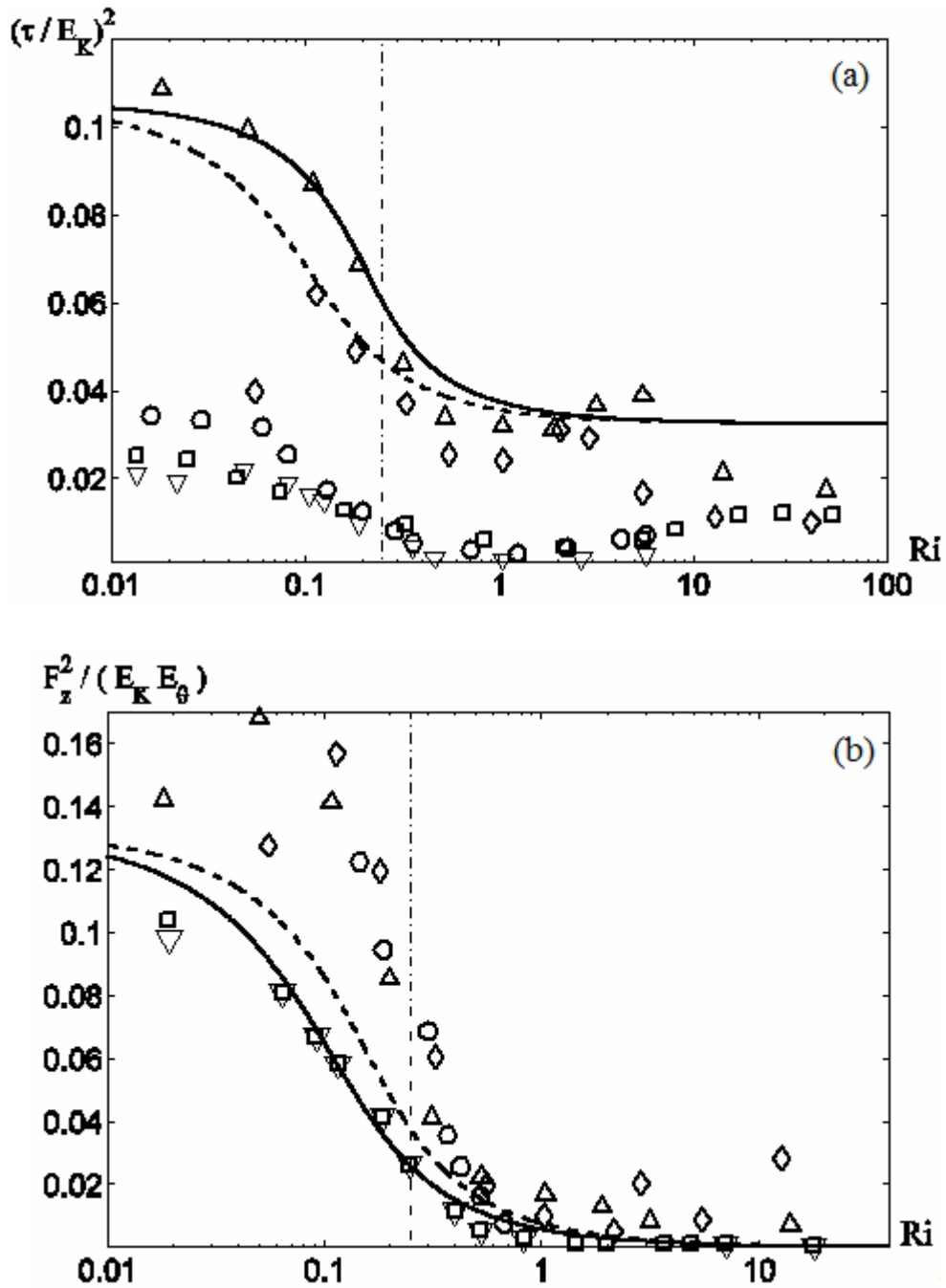


Рис. 2 – Квадраты безразмерных турбулентных потоков (а) количества движения $\hat{\tau}^2 \equiv (\tau/E_K)^2$ и (б) температуры $\hat{F}_z^2 \equiv F_z^2 / (E_K E_\theta)$ как функции градиентного числа Ричардсона Ri . Атмосферные данные – перевернутые треугольники [3,40], квадраты [31] и кружки [50]; лабораторные данные – ромбы [38]; данные LES – треугольники [53]. Теоретические кривые: сплошная линия – для $Ri_f^\infty = 0.2$ и пунктирная – для $Ri_f^\infty = 0.4$.

На рис. 2 представлены зависимости от Ri безразмерных турбулентных потоков: (а) $\hat{\tau}^2 \equiv (\tau/E_K)^2$ и (б) $F_z^2 / (E_K E_\theta)$ – по данным работ [3,31,38,40,50,53]. Давно известно (см. например, разделы 5.3 и 8.5 в [37]), что атмосферные наблюдения при

нейтральной стратификации дают более изменчивые и, как правило, меньшие значения отношений (τ/E_K) и $F_z^2/(E_K E_\theta)$, чем лабораторные эксперименты. Это не удивительно: измеренные значения E_K , в атмосфере включают как турбулентность, так и низкочастотные флуктуации скорости, вызванные взаимодействием воздушного потока с неоднородностями подстилающей поверхности. Поэтому для калибровки нашей локальной модели более естественно использовать данные о $\hat{\tau}^2$, полученные из лабораторных экспериментов и численных вихререзающих моделей. По данным, представленным на рис. 2, получено: $(\tau/E_K)^{(0)} = 0.326$, $(\tau/E_K)^\infty = 0.18$ при $Ri \gg 1$, $(\hat{\tau}^2)^{(0)}/(\hat{F}_z^2)^{(0)} = Pr_T^{(0)} = 0.8$, и $(\hat{F}_z^2)^\infty = 0$.

Вертикальная анизотропия $A_z = E_z/E_K$, показана на рис. 3 по данным работ [3,31,38,40,47,50,53]. Эти данные отчасти противоречивы и требуют тщательного анализа. Для нейтральной стратификации, мы принимаем оценку $A_z^{(0)} = 0.25$, основанную на точных лабораторных экспериментах [2] и DNS [35] и согласующуюся с независимым анализом пристеночной турбулентности [30]. Атмосферные данные (например, рис. 75 в [37]), дают меньшие значения $A_z^{(0)}$; но, как уже говорилось, они переоценивают энергию горизонтальных флуктуаций скорости и поэтому недооценивают A_z , в частности, при нейтральной стратификации. Большие значения Ri в численных моделях наблюдаются вблизи верхней границы пограничного

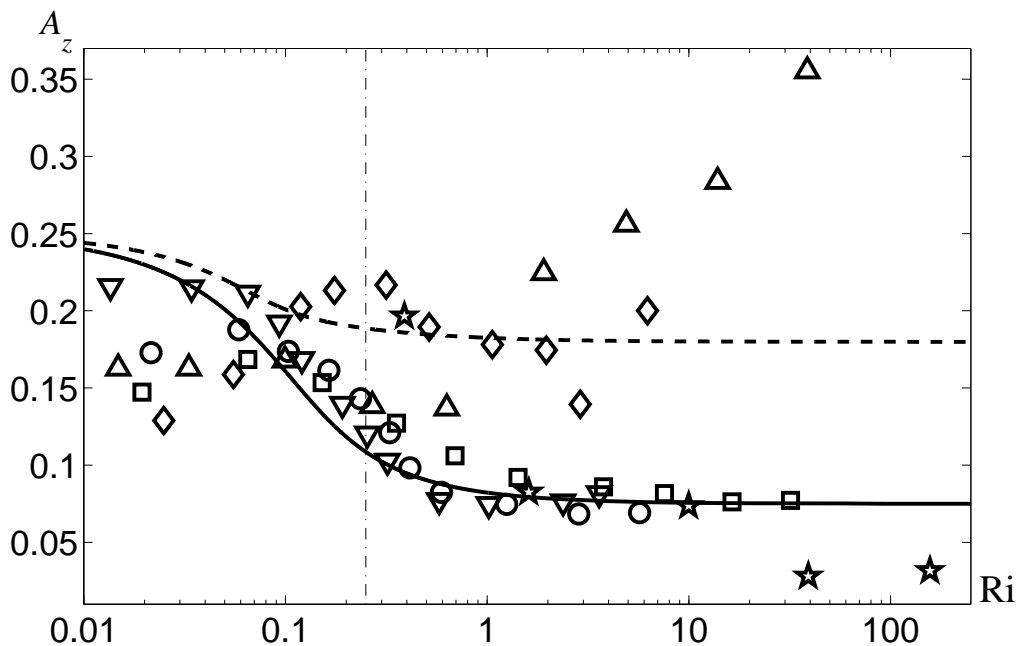


Рис. 3 – Вертикальная анизотропия $A_z = E_z/E_K$ как функция градиентного числа Ричардсона Ri . Атмосферные данные – перевернутые треугольники [3,40], квадраты [31] и кружки [50]; лабораторные данные – ромбы [38]; данные LES - треугольники [53] и DNS – звездочки [47]. Теоретические кривые: сплошная линия – для $Ri_f^\infty = 0.2$ и пунктирная – для $Ri_f^\infty = 0.4$.

слоя, где $TKЭ$ локального происхождения может оказаться незначительной по сравнению с $TKЭ$, принесённой из нижних слоев. Не удивительно, что зависимость A_z от Ri страдает очень большим разбросом данных. В целом, атмосферные данные характеризуют A_z как монотонно убывающую функцию от Ri и позволяют дать приближенную оценку нижнего предела: $A_z^\infty = 0.075$.

Полученные выше оценки $A_z^{(0)}$, $(\tau^2 E_K^{-2})_{Ri=0}$, $Pr_T^{(0)}$, Ri_f^∞ , A_z^∞ , и $(\tau^2 E_K^{-2})_{Ri=\infty}$ позволяют определить наши эмпирические константы.

Начинаем с данных, относящихся к нейтральной стратификации. Оценка $A_z^{(0)} = 0.25$ дает

$$C_r = 3A_z^{(0)} \left(1 - 3A_z^{(0)}\right)^{-1} = 3. \quad (56)$$

Комбинируя формулы (25с) для E_K и (32) для t_T , применяя их к логарифмическому пограничному слою, в котором $l_z = z$, $\tau = \tau|_{z=0} \equiv u_*^2$ и $S = u_*(kz)^{-1}$ (u_* – скорость трения, $\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана), и используя оценки $A_z^{(0)} = 0.25$ и $(\tau/E_K)^{(0)} = 0.33$, получаем

$$C_K = k \left(A_z^{(0)}\right)^{1/2} \left(\frac{E_K}{\tau}\right)_{Ri=0}^{3/2} = 1.08. \quad (57)$$

Подставляя $C_K = 1.08$ и $Pr_T^{(0)} = 0.8$ в формулы (43а) и (47), получаем:

$$C_{\tau 1} = \frac{C_K}{2A_z^{(0)}} \left(\frac{E_K}{\tau}\right)_{Ri=0}^{-2} = 0.228, \quad (58)$$

$$C_F = C_{\tau 1} / Pr_T^{(0)} = 0.285. \quad (59)$$

Подставляя $C_r = 3$, $A_z^\infty = 0.075$ и $Ri_f^\infty = 0.2$ в формулу (46), получаем

$$\Psi_3^\infty = \frac{A_z^\infty}{A_z^{(0)}} + \frac{3Ri_f^\infty}{C_r(1 - Ri_f^\infty)} = 0.55, \quad C_3 = \frac{1}{Ri_f^\infty} (\Psi_3^\infty - 1) = -2.25. \quad (60)$$

Константы C_1 и C_2 характеризуют обмен энергией между горизонтальными компонентами скорости и не влияют на какие-либо другие аспекты нашей модели. Тем не менее, принимая $C_1 = C_2$ (из соображений симметрии) и учитывая формулу $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ (вытекающую из требования $\sum_i E_i = E_K$), получаем:

$$C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}C_3 = 1.125. \quad (61)$$

Подставляя $C_K = 1.08$, $Ri_f^\infty = 0.2$, $A_z^\infty = 0.075$ и $(\tau/E_K)^\infty = 0.18$ в формулы (50b), получаем:

$$\Psi_\tau^\infty = \frac{C_K \left[(\tau/E_K)^\infty \right]^2 (1 - Ri_f^\infty)}{2A_z^\infty} = 0.187; \quad C_{\tau 2} = \frac{1}{Ri_f^\infty} (\Psi_\tau^\infty - C_{\tau 1}) = -0.208. \quad (62)$$

Подставляя $C_r = 3$, $Ri_f^\infty = 0.2$ и $\Psi_3^\infty = 0.55$ в формулу (45), получаем:

$$C_\theta = \frac{1}{1 + C_r} \left[\frac{C_r \Psi_3^\infty}{3} \left(\frac{1}{Ri_f^\infty} - 1 \right) - 1 \right] = 0.3. \quad (63)$$

Зависимость $Ri_f = \Phi(Ri)$, рассчитанная по формулам (41)–(42) с нашими эмпирическими константами, показана на рис. 1b жирной линией. С точностью до 5 % она аппроксимируется приближенной формулой

$$Ri_f = \Phi(Ri) \approx 1.25 Ri \frac{(1 + 36 Ri)^{1.7}}{(1 + 19 Ri)^{2.7}}. \quad (64)$$

В полученных выше оценках мы не использовали данные о безразмерном потоке тепла $\hat{F}_z^2 \equiv F_z^2 / (E_K E_\theta)$, показанные на рис. 2b. В расчетах по формулам (60)–(63) принято $Ri_f^\infty = 0.2$. Однако точность этой оценки невелика. Рисунок 1b позволяет с уверенностью определить лишь диапазон $0.2 < Ri_f^\infty < 0.4$. Чтобы продемонстрировать степень неопределенности всех наших эмпирических оценок, теоретические кривые на рисунках 1-3 построены в двух вариантах – для $Ri_f^\infty = 0.2$ (сплошные линии) и $Ri_f^\infty = 0.4$ (пунктирные линии). В последнем случае надлежащим образом переопределены и другие константы: $C_3 = -0.083$, $C_2 = -0.22$ и $C_\theta = 0.113$.

Теоретические кривые для безразмерного потока тепла $\hat{F}_z^2 \equiv F_z^2 / (E_K E_\theta)$ как функции от Ri , представленные на рис. 2b, неплохо согласуются с экспериментальными данными. Поскольку эти данные не использовались для калибровки модели, рис. 2b служит её экспериментальным подтверждением.

6 Выводы

В большинстве практически используемых моделей замыкания для устойчиво стратифицированных геофизических течений предполагается, что вертикальные

турбулентные потоки направлены по градиентам переносимых субстанций; коэффициенты турбулентной вязкости, K_M , температуропроводности, K_H , и диффузии, K_D , считаются пропорциональными турбулентному масштабу длины, l_T и турбулентному масштабу скорости u_T , который в свою очередь, берется пропорциональным квадратному корню из $TKЭ$, $E_K^{1/2}$, так что $K_{\{M,H,D\}} \sim E_K^{1/2} l_T$; а E_K определяется из уравнения баланса $TKЭ$. Этот подход был в свое время предложен Колмогоровым для течений с нейтральной стратификацией плотности, где он служит очень хорошим приближением. Однако, при применении к устойчиво стратифицированным течениям из него следует, что турбулентность генерируется сдвигом скорости лишь при числах Ричардсона, превышающих критическое значение (Ri_c близких к 0.25). Это противоречит экспериментальным данным. Чтобы устранить противоречие, в современных моделях замыкания принимается $K_{\{M,H,D\}} = f_{\{M,H,D\}}(Ri) E_K^{1/2} l_z$, где $f_{\{M,H,D\}}(Ri)$ - поправочные функции, определяемые эмпирическим путем или с помощью дополнительного теоретического анализа. При хорошо подобранных $f_{\{M,H,D\}}(Ri)$ для решения проблемы замыкания остается только определить l_z . Подобный подход имеет, однако, серьезные недостатки.

Концепции градиентного переноса и коэффициентов турбулентного обмена, как и соотношения $K_{\{M,H,D\}} = f_{\{M,H,D\}}(Ri) E_K^{1/2} l_T$, согласуются с уравнениями баланса турбулентных потоков только в сравнительно простых случаях. Коэффициенты турбулентного обмена могут быть строго определены лишь в режиме однородной турбулентности, в противоположность турбулентным потокам, которые представляют собой ясно определяемые и непосредственно измеряемые параметры. Поэтому, предпочтительно опираться на уравнения баланса турбулентных потоков, а не на гипотезы о коэффициентах обмена, хотя бы потому, что последние не всегда могут быть строго определены. Уравнение баланса $TKЭ$ не полностью характеризует энергетику турбулентности, не говоря уже о том, что вертикальный турбулентный перенос определяется не E_K , а энергией флуктуаций вертикальной скорости, E_z . По этим причинам традиционный подход имеет заведомо ограниченную область приложения.

Мы предлагаем более строгую и в то же время сравнительно простую теорию. В дополнение к уравнению баланса $TKЭ$, мы используем уравнения баланса турбулентной потенциальной энергии ($ТПЭ$) или суммарной энергии турбулентности ($СЭТ = TKЭ + ТПЭ$), что гарантирует генерацию турбулентности сдвигами скорости при любой стратификации.

Кроме того, мы не навязываем концепции градиентного переноса и коэффициентов турбулентного обмена, а используем вместо них уравнения баланса для турбулентных потоков, и выводим из этих уравнений, а не постулируем, выражения для коэффициентов переноса, когда это физически обосновано, т.е. для стационарного однородного режима турбулентности.

В уравнении для вертикального потока потенциальной температуры мы учитываем механизм подавления, обусловленный флуктуациями плавучести, и показываем, что именно он определяет принципиальное различие между переносами тепла и количества движения.

Для определения энергии флуктуаций вертикальной скорости, мы модифицируем традиционную гипотезу изотропизации с учетом влияния стратификации на

перераспределение $TKЭ$ между горизонтальными и вертикальной компонентами скорости.

В настоящей работе мы подробно рассматриваем лишь простейший, алгебраический вариант новой модели замыкания и калибруем её, пользуясь доступными экспериментальными данными.

Рисунки 1–3, представляющие турбулентное число Прандтля $Pr_T = K_M/K_H$, турбулентное число Ричардсона Ri_f , безразмерные турбулентные потоки $(\tau/E_K)^2$ и $F_z^2(E_K E_\theta)^{-1}$, а также анизотропию $A_z = E_z/E_K$, как функции градиентного числа Ri , обнаруживают два существенно разных режима турбулентности, разделенных сравнительно узким интервалом чисел Ричардсона по обе стороны от порогового значения $Ri \approx 0.25$ (показанного на рисунках вертикальными пунктирными линиями). При $Ri < 0.1$ и $Ri > 1$ отношения $(\tau/E_K)^2$ и $F_z^2(E_K E_\theta)^{-1}$ практически выходят на постоянные значения, соответствующие при $Ri < 0.1$ – сильной турбулентности, способной эффективно переносить как количество движения, так и температуру; а при $Ri > 1$ – слабой турбулентности, способной переносить количество движения, но малоэффективной в переносе тепла.

Пороговое значение Ri на наших рисунках практически совпадает с наиболее часто цитируемой оценкой критического числа Ричардсона в теории гидродинамической неустойчивости: $Ri_c = 0.25$. Согласно теории неустойчивости, бесконечно малые возмущения в течении со сдвигом скорости экспоненциально растут при $Ri < Ri_c$ и не растут при $Ri > Ri_c$, что интерпретировалось как неизбежность ламинаризации течения при $Ri > Ri_c$. Наш анализ, подкрепленный экспериментальными данными, показывает, что на самом деле ламинаризация не обязана происходить: турбулентность может генерироваться сдвигом скорости при любых Ri , но при $Ri > Ri_c$ для "включения" генерации турбулентности необходимы конечные, а не бесконечно малые возмущения.

В настоящей статье рассмотрена локальная модель, пригодная для описания однородного режима турбулентности. Более полная модель, включающая турбулентные переносы третьего порядка (Φ_K, Φ_P, Φ_F и $\Phi_{\{1,2\}}^{(\tau)}$), будет изложена в последующих статьях.

Приложение А. Оценка члена, содержащего флуктуации давления, в уравнении баланса для турбулентного потока потенциальной температуры

Приближение, используемое в разделе 2, а именно

$$\beta \langle \theta^2 \rangle + \frac{1}{\rho_0} \left\langle \theta \frac{\partial}{\partial z} p \right\rangle = C_\theta \beta \langle \theta^2 \rangle, \quad (A1)$$

где $C_\theta = const < 1$, выводится следующим образом. Применяя оператор дивергенции к уравнению движения, получаем:

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta p = -\beta \frac{\partial}{\partial z} \theta. \quad (A2)$$

Применяя к уравнению (A2) обратный лапласиан, получаем:

$$\frac{1}{\rho_0} p = \beta \Delta^{-1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_0} \left\langle \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right\rangle = -\beta \left\langle \theta \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right\rangle. \quad (\text{A3})$$

Применяя анализ масштабов к правой части второй формулы (A3), получаем

$$\frac{\left\langle \theta \Delta^{-1} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \right\rangle}{\langle \theta^2 \rangle} \approx (1 + \alpha^{-1}) \left(1 - \frac{\arctan \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right), \quad (\text{A4})$$

где $\alpha = l_z^2 / l_\perp^2 - 1$, l_z и l_\perp - масштабы длины корреляционной функции $\langle \theta(t, \mathbf{x}_1) \theta(t, \mathbf{x}_2) \rangle$ в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Формулы (A3) и (A4) дают:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\left\langle \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right\rangle}{\langle \theta^2 \rangle} \approx - \begin{cases} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} \alpha \right), & \alpha \ll 1 \\ 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}, & \alpha \gg 1. \end{cases} \quad (\text{A5})$$

Отсюда следует, что интересующий нас коэффициент $C_\theta = \left\{ 1 + \left[\text{правая часть формулы (A5)} \right] \right\}$ стремится к 2/3 при тепловой изотропии (что соответствует нейтральной стратификации) и стремится к нулю при полной тепловой анизотропии. Наша эмпирическая оценка $C_\theta = 0.3$ – разумный компромисс между этими крайними случаями.

Благодарности. Авторы благодарят профессора С.Н. Степаненко за обсуждения и ценные замечания. Настоящая работа выполнена при содействии Международного Метеорологического Института им. К.Г. Росеби (Стокгольм, Швеция), Академии Наук Израиля, Бюджетной комиссии израильских университетов и Израильской комиссии по атомной энергии.

Литература

1. Курбацкий А.Ф. Лекции по турбулентности. – Новосибирск, Изд-во Новосибирского государственного университета, 2000.
2. Agrawal, A., L. Djenidi and R.A. Antobin (2004) URL http://in3.dem.ist.utl.pt/lxaser2004/pdf/paper_28_1.pdf
3. Banta R.M., R.K. Newsom, J.K. Lundquist, Y.L. Pichugina, R.L. Coulter and L. Mahrt (2002) Nocturnal low-level jet characteristics over Kansas during CASES-99. *Boundary-Layer Meteorol.*, 105, pp. 221–252.
4. Beare, R.J., M.K. MacVean, A.A.M. Holtslag, J. Cuxart, I. Esau, J.C. Golaz, M.A. Jimenez, M. Khairouidinov, B. Kosovic, D. Lewellen, T.S. Lund, J.K. Lundquist, A. McCabe, A.F. Moene, Y. Noh, S. Raasch and P. Sullivan (2006) An intercomparison of large eddy simulations of the stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 118, pp. 247– 272.

5. *Bertin, F., J. Barat and R. Wilson* (1997) Energy dissipation rates, eddy diffusivity, and the Prandtl number: An in situ experimental approach and its consequences on radar estimate of turbulent parameters. *Radio Science*, 32, pp. 791–804.
6. *Canuto, V.M., F. Minotti* (1993) Stratified turbulence in the atmosphere and oceans: a new sub-grid model. *J. Atmos. Sci.* 50, pp. 1925–1935.
7. *Canuto, V.M., A. Howard, Y. Cheng, M.S. Dubovikov* (2001) Ocean turbulence. Part I: One-point closure model - momentum and heat vertical diffusivities, *J. Phys. Oceanogr.*, 31, pp. 1413–1426.
8. *Cheng, Y., V.M. Canuto, A.M. Howard* (2002) An improved model for the turbulent PBL. *J. Atmosph. Sci.*, 59, pp. 1550–1565.
9. *Churchill, S.W.* (2002) A reinterpretation of the turbulent Prandtl number. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 41, pp. 6393–6401.
10. *Cuxart, J. and 23 co-authors* (2006) Single-column model intercomparison for a stably stratified atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 118, pp. 273–303.
11. *Dalaidier, F. and C. Sidi* (1987) Evidence and interpretation of a spectral gap in the turbulent atmospheric temperature spectra. *J. Atmos. Sci.* 44, pp. 3121–3126.
12. *Elperin, T., N. Kleeorin and I. Rogachevskii* (1996) Isotropic and anisotropic spectra of passive scalar fluctuations in turbulent fluid flow. *Phys. Rev. E*, 53, pp. 3431–3441.
13. *Elperin, T., N. Kleeorin, I. Rogachevskii and S.S. Zilitinkevich* (2002) Formation of large-scale semi-organized structures in turbulent convection. *Phys. Rev. E*, 66, 066305 (1–15).
14. *Elperin, T., N. Kleeorin, I. Rogachevskii and S.S. Zilitinkevich* (2006) Turbulence and coherent structures in geophysical convection. *Boundary-Layer Meteorol.* 119, pp. 449–472.
15. *Esau, I.* (2004) Simulation of Ekman boundary layers by large eddy model with dynamic mixed sub-filter closure, *Environmental Fluid Mech.*, 4, pp. 273–303.
16. *Esau, I.N. and Zilitinkevich S.S.* (2006) Universal dependences between turbulent and mean flow parameters in stably and neutrally stratified planetary boundary layers. *Nonlin. Processes Geophys.*, 13, pp. 135–144.
17. *Foken, T.* (2006) 50 years of the Monin–Obukhov similarity theory. *Boundary-Layer Meteorology*, 119, pp. 431–447.
18. *Hanazaki, H. and J.C.R. Hunt* (1996) Linear processes in unsteady stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 318, pp. 303–337.
19. *Hanazaki, H. and J.C.R. Hunt* (2004) Structure of unsteady stably stratified turbulence with mean shear. *J. Fluid Mech.*, 507, pp. 1–42.
20. *Hunt, J.C.R., J.C. Kaimal and J.E. Gaynor* (1985) Some observations of turbulence in stable layers. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 111, pp. 793–815.
21. *Hunt, J.C.R., D.D. Stretch and R.E. Britter* (1988) Length scales in stably stratified turbulent flows and their use in turbulence models. In: *Proc. I.M.A. Conference on “Stably Stratified Flow and Dense Gas Dispersion”* (J. S. Puttock, Ed.), Clarendon Press, pp. 285–322.
22. *Holton, J.R.* (2004) *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, New York, 535 pp.
23. *Jin, L.H., R.M.C. So and T.B. Gatski* (2003) Equilibrium states of turbulent homogeneous buoyant flows. *J. Fluid Mech.*, 482, pp. 207–233.
24. *Kays, W.M.* (1994) Turbulent Prandtl number – where are we? *J. Heat Transfer*, 116, pp. 284–295.
25. *Keller, K. and C.W. Van Atta* (2000) An experimental investigation of the vertical temperature structure of homogeneous stratified shear turbulence. *J. Fluid Mech.*, 425, pp. 1–29.

26. Kraus, E.B. and J.A. Businger (1994) Atmosphere-Ocean Interaction. Oxford University Press, Oxford, 362 pp.
27. Kolmogorov, A.N. (1941) Energy dissipation in locally isotropic turbulence. Doklady AN SSSR, 32, No.1, pp. 19–21.
28. Kondo, J., O. Kanechika and N. Yasuda (1978) Heat and momentum transfer under strong stability in the atmospheric surface layer. J. Atmos. Sci., 35, pp. 1012–1021.
29. Luyten, P.J., S. Carniel and G. Umgiesser (2002) Validation of turbulence closure parameterisations for stably stratified flows using the PROVESS turbulence measurements in the North Sea. J. Sea Research, 47, pp. 239–267.
30. L'vov, V.S., A. Pomyalov, I. Procaccia and S.S. Zilitinkevich (2006) Phenomenology of wall bounded Newtonian turbulence. Phys. Rev., E 73, 016303, pp. 1–13.
31. Mahrt, L. and D. Vickers (2005) Boundary layer adjustment over small-scale changes of surface heat flux. Boundary-Layer Meteorol., 116, pp. 313–330.
32. Mauritsen, T., and G. Svensson (2007) Observations of stably stratified shear-driven atmospheric turbulence at low and high Richardson numbers. J. Atmos. Sci., 64, pp. 645–655.
33. Mauritsen, T., G. Svensson, S.S. Zilitinkevich, E. Esau, L. Enger and B. Grisogono. (2007) A total turbulent energy closure model for neutrally and stably stratified atmospheric boundary layers. J. Atmos. Sci., 64, pp. 4117–4130.
34. Mellor, G.L. and T. Yamada (1974) A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. J. Atmos. Sci., 31, pp. 1791–1806.
35. Moser, R.G., J. Kim and N.N. Mansour (1999) Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re = 590$. Phys. Fluids, 11, pp. 943–945.
36. Monin, A.S. and A.M. Obukhov (1954) Main characteristics of the turbulent mixing in the atmospheric surface layer. Trudy Geophys. Inst. AN. SSSR, 24(151), pp. 153–187.
37. Monin, A.S. and A.M. Yaglom (1971) Statistical Fluid Mechanics. Vol. 1. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 769 pp.
38. Ohya, Y. (2001) Wind-tunnel study of atmospheric stable boundary layers over a rough surface, Boundary-Layer Meteorol., 98, pp. 57–82.
39. Ozmidov, R.V. (1990) Diffusion of Contaminants in the Ocean. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 283 pp.
40. Poulos, G.S., W. Blumen, D.C. Fritts, J.K. Lundquist, J. Sun, S.P. Burns, C. Nappo, R. Banta, R. Newsom, J. Cuxart, E. Terradellas, B. Balsley and M. Jensen (2002) CASES-99: A Comprehensive Investigation of the Stable Nocturnal Boundary Layer, Bull. Amer. Meteorol. Soc., 83, pp. 555–581.
41. Rehmman, C.R. and J.H. Hwang (2005) Small-scale structure of strongly stratified turbulence, J. Phys. Oceanogr., 32, pp. 154–164.
42. Rehmman, C.R., J.R. Koseff (2004) Mean potential energy change in stratified grid turbulence Dynamics of Atmospheres and Oceans, 37, pp. 271–294.
43. Richardson, L.F. (1920) The supply of energy from and to atmospheric eddies. Proc. Roy. Soc. London, A 97, pp. 354–373.
44. Rotta, J.C. (1951) Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Z. Physik, 129, pp. 547–572.
45. Schumann, U. and T. Gerz (1995) Turbulent mixing in stably stratified sheared flows. J. App. Meteorol., 34, pp. 33–48.
46. Strang, E.J. and H.J.S. Fernando (2001) Vertical mixing and transports through a stratified shear layer. J. Phys. Oceanogr., 31, pp. 2026–2048.
47. Stretch, D.D., J.W. Rottman, K.K. Nomura, and S.K. Venayagamoorthy (2001) Transient mixing events in stably stratified turbulence. In: 14th Australasian Fluid Mechanics Conference, Adelaide, Australia, 10–14 December 2001.

48. *Umlauf, L.* (2005) Modelling the effects of horizontal and vertical shear in stratified turbulent flows, *Deep-Sea Research*, 52, pp. 1181–1201.
49. *Umlauf, L. and H. Burchard* (2005) Second-order turbulence closure models for geophysical boundary layers. A review of recent work. *Continental Shelf Research*, 25, pp. 725–827.
50. *Uttal, T., J.A. Curry, M.G. McPhee, D.K. Perovich and 24 other co-authors* (2002) Surface Heat Budget of the Arctic Ocean, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 83, pp. 255–276.
51. *Weng, W. and P. Taylor* (2003) On modelling the one-dimensional Atmospheric Boundary Layer, *Boundary-Layer Meteorol.*, 107, pp. 371–400.
52. *Zilitinkevich, S.S., T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii* (2007) Energy- and flux budget (EFB) turbulence closure model for stably stratified flows. Part I: Steady-state, homogeneous regimes. *Boundary-Layer Meteorol.*, 125, pp. 167–192.
53. *Zilitinkevich, S.S., T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, I. Esau, T. Mauritsen, M. Miles* (2008) Turbulence energetics in stably stratified geophysical flows: strong and weak mixing regimes. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 134, pp. 793–799.
54. *Zilitinkevich, S.S. and I.N. Esau* (2007) Similarity theory and calculation of turbulent fluxes at the surface for the stably stratified atmospheric boundary layers. *Boundary-Layer Meteorol.*, 125, pp. 193–296.
55. *Zilitinkevich, S.S., V.M. Gryanik, V.N. Lykossov and D.V. Mironov* (1999) Third-order transport and non-local turbulence closures for convective boundary layers. *J. Atmosph. Sci.*, 56, pp. 3463–3477.
56. *Zilitinkevich, S.S., V.L. Perov and J.C. King* (2002) Near-surface turbulent fluxes in stable stratification: calculation techniques for use in general circulation models. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 128, pp. 1571–1587.

Closure of the Reynolds equations for stably stratified turbulent flows in the atmosphere and the ocean

Abstract. *This paper presents a new turbulence closure model based on the budget equations for the key second moments: turbulent kinetic and potential energies: TKE and TPE (comprising the turbulent total energy: $TTE = TKE + TPE$) and vertical turbulent fluxes of momentum and buoyancy (proportional to potential temperature). Besides the concept of TTE, we essentially use the non-gradient correction to the traditional buoyancy flux formulation (disregarded in the traditional formulations for the eddy conductivity). In the proposed model, turbulent motions exist at any values of the gradient Richardson number, Ri . Instead of its critical value separating – as usually assumed – the turbulent and the laminar regimes, the model, as well as experimental data, reveals a transition interval, $0.1 < Ri < 1$, which separates two regimes of principally different nature but both turbulent: strong turbulence at $Ri \ll 1$; and weak turbulence, capable of transporting momentum but much less efficient in transporting heat, at $Ri > 1$. Predictions from the model are consistent with available data from atmospheric and laboratory experiments, direct numerical simulation (DNS) and large-eddy simulation (LES).*

Keywords: *anisotropy, closure of turbulent motion equations, kinetic turbulent energy, potential turbulent energy, total turbulent energy, critical Richardson number, mixing length, stable stratification, turbulent viscosity, turbulent transport.*